Math. Z. 141, 147–158 (1975)

Inklusions- und Abstimmungssysteme

Arnold Neumaier

0. Überblick

Ein System von Teilmengen einer endlichen Menge, in dem mit einer Menge auch jede Obermenge enthalten ist, wird Inklusionssystem (IS) genannt.

In dieser Arbeit werden die IS auf zwei Arten klassifiziert: Der M-Typ (O-Typ) eines IS $\mathscr{W}$ ist die kleinste Zahl n derart, daß $\mathscr{W}$ Durchschnitt von n metrischen (geordneten) IS ist. Dabei bilden die metrischen (geordneten) IS spezielle Klassen von IS.

Nach einer Charakterisierung der metrischen bzw. geordneten IS durch die Lösbarkeit eines linearen Ungleichungssystems bzw. durch die Linearität einer gewissen Quasiordnung in Nr. 2 wird in Nr. 3 gezeigt, daß M-Typ und O-Typ stets endlich sind und daß jede natürliche Zahl als M(O)-Typ wirklich vorkommt.

Nr. 4 beantwortet eine Verallgemeinerung einer Frage von Pickert [2] über einen Zusammenhang von taktischen Konfigurationen mit IS negativ.

Abstimmungssysteme (AS) sind solche IS, in denen keine zwei disjunkten Mengen vorkommen. Ein AS heißt M′(O′)-darstellbar, wenn es Durchschnitt von metrischen (geordneten) *Abstimmungs*systemen ist; in diesem Fall werden M′(O′)-Typ analog wie oben definiert.

Spezielle AS sind die IS, deren Mengen sämtlich ein festes Element enthalten (AS mit Vetorecht). In Nr. 5 wird gezeigt, daß alle AS mit Vetorecht darstellbar sind. Nr. 6 gibt dann notwendige Bedingungen für die Darstellbarkeit von AS. Damit läßt sich insbesondere zeigen, daß es nichtdarstellbare AS gibt.

1. Inklusionssysteme

P sei eine endliche Menge.

1.1. **Definition.** Ein nichtleeres System $\mathscr{W}$ von Teilmengen von P heißt *Inklusionssystem (über P)*, kurz IS, wenn gilt:

$$K\in\mathscr{W},\quad K\subseteq K' \Rightarrow K'\in\mathscr{W} \qquad \text{(Axiom I).}$$

Beispiel. s sei Abbildung von P in die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Setze für $K\subseteq P$:

$$s(K) := \sum_{x\in K} s(x).$$

Ist dann q eine reelle Zahl, $0\leqq q\leqq s(P)$, so ist

$$\mathscr{W}_{s,q} := \{K\subseteq P \mid s(K)\geqq q\}$$

ein Inklusionssystem. Die so definierten IS sollen *metrische* IS heißen.

Jedes IS enthält die Menge P selbst. Das einzige IS, das die leere Menge enthält, ist die Potenzmenge von P.

1.2. In P sei eine lineare Ordnung τ gegeben. Diese Ordnung läßt sich (i.allg. aber nicht linear) fortsetzen auf die Potenzmenge von P durch die Festsetzung: $K\tau K'$ genau dann, wenn eine injektive Abbildung i von K nach K' existiert mit der Eigenschaft $x\tau i(x)$ für alle $x\in P$.

Ein System $\mathscr{W}$ von Teilmengen von P heißt *τ-geordnet*, wenn gilt:

$$K\in\mathscr{W}, \quad K\tau K' \Rightarrow K'\in\mathscr{W} \qquad \text{(Axiom O)}.$$

$\mathscr{W}$ heißt *geordnet*, wenn es τ-geordnet ist für eine lineare Ordnung τ von P.

Jedes τ-geordnete System $\mathscr{W}$ ist ein Inklusionssystem. Für i kann man im Fall $K\subseteq K'$ nämlich die Inklusionsabbildung wählen.

Jedes metrische IS ist geordnet. In P gibt es nämlich eine lineare Ordnung τ mit $x\tau y \Rightarrow s(x)\leqq s(y)$, und diese erfüllt dann Axiom O, wie man leicht mittels $s(K)\leqq s(iK)\leqq s(K')$ für die in der Definition von $K\tau K'$ auftretende Abbildung i feststellt.

1.3. Ist $\mathscr{B}$ ein nichtleeres System von Teilmengen von P, τ eine lineare Ordnung von P, so ist der Durchschnitt $\langle\mathscr{B}\rangle$ bzw. $\langle\mathscr{B}\rangle_\tau$ aller $\mathscr{B}$ enthaltenden IS (τ-geordneten IS) gegeben durch

$$\langle\mathscr{B}\rangle=\{K\subseteq P \mid \exists K'\in\mathscr{B}: K'\subseteq K\},$$

$$\langle\mathscr{B}\rangle_\tau=\{K\subseteq P \mid \exists K'\in\mathscr{B}: K'\tau K\}.$$

$\langle\mathscr{B}\rangle$ bzw. $\langle\mathscr{B}\rangle_\tau$ ist selbst ein (τ-geordnetes) IS und heißt das von $\mathscr{B}$ erzeugte (τ-erzeugte) IS.

Es gilt stets $\mathscr{B}\subseteq\langle\mathscr{B}\rangle\subseteq\langle\mathscr{B}\rangle_\tau$.

1.4. Ist $\mathscr{W}$ ein IS über P, und P' (endliche) Obermenge von P, so ist

$$\mathscr{W}_{P'}:=\{K\subseteq P' \mid K\cap P\in\mathscr{W}\}$$

ein IS über P'. Der Durchschnitt von $\mathscr{W}_{P'}$ mit der Potenzmenge von P ist $\mathscr{W}$.

$x\in P$ heißt unwesentlich in $\mathscr{W}$, wenn mit jedem $K\in\mathscr{W}$ stets auch $K-\{x\}$ in $\mathscr{W}$ liegt, sonst wesentlich. Sind alle $x\in P$ wesentlich in $\mathscr{W}$, so soll $\mathscr{W}$ reduziert heißen. Mit P_0 als Menge der in $\mathscr{W}$ wesentlichen Elemente von P ist

$$\mathscr{W}_0:=\{K_0\subseteq P_0 \mid K_0\in\mathscr{W}\}$$

ein reduziertes IS über P_0 und $\mathscr{W}=(\mathscr{W}_0)_P$.

Mit $\mathscr{W}_0$ ist auch $\mathscr{W}$ metrisch (geordnet): Ist $\mathscr{W}_0$ metrisch, $\mathscr{W}_0=\mathscr{W}_{s_0,q}$, so ist $\mathscr{W}=\mathscr{W}_{s,q}$ mit $s(x)=s_0(x)$ für $x\in P_0$, $=0$ sonst; ist $\mathscr{W}_0$ τ_0-geordnet, so ist $\mathscr{W}$ τ-geordnet mit

$$x\tau y \Leftrightarrow x,y\in P_0,\ x\tau_0 y \quad\text{oder}\quad x\notin P_0,\ y\in P_0 \quad\text{oder}\quad x,y\notin P_0,\ x\tau' y,$$

wobei τ' eine beliebige lineare Ordnung von $P-P_0$ ist.

2. Charakterisierung der metrischen und geordneten IS

2.1. Eine reflexive und transitive Relation $\leq$ von P heißt Quasiordnung von P. Eine Quasiordnung $\leq$ soll linear heißen, wenn für alle x, y P gilt: $x \leqq y$ oder $y \leqq x$. Eine lineare Ordnung τ heißt zur Quasiordnung $\leq$ gehörig, wenn für alle $x, y \in P$: $x \tau y \Rightarrow x \leqq y$.

Zu jeder linearen Quasiordnung $\leq$ gibt es eine zugehörige lineare Ordnung τ: Denn sei $x \equiv y \Leftrightarrow x \leqq y \leqq x$. In jeder Äquivalenzklasse von $P/\equiv$ sei eine beliebige lineare Ordnung τ' definiert. Die gesuchte lineare Ordnung kann dann durch

$$x \tau y \Leftrightarrow x \equiv y, x \tau' y \quad \text{oder} \quad x \not\equiv y, x \leqq y$$

gegeben werden.

$\mathscr{W}$ sei IS über P. Die Relation $[\mathscr{W}]$ in P, für die $x[\mathscr{W}]y$ dasselbe besagt wie: Für alle $K \in \mathscr{W}$ gilt

$$x \in K, \qquad y \notin K \Rightarrow (K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{W},$$

ist eine Quasiordnung von P.

Offenbar ist $[\mathscr{W}]$ reflexiv. Ist $x[\mathscr{W}]y[\mathscr{W}]z$ und $x \in K \in \mathscr{W}$, $z \notin K$, so gilt

$$y \in K \Rightarrow (K - \{y\}) \cup \{z\} \in \mathscr{W} \Rightarrow (K - \{x\}) \cup \{z\} \in \mathscr{W},$$

$$y \notin K \Rightarrow (K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{W} \Rightarrow (K - \{x\}) \cup \{z\} \in \mathscr{W},$$

also $x[\mathscr{W}]z$, und $[\mathscr{W}]$ ist als transitiv nachgewiesen.

Lemma. *Ist $\mathscr{W}$ ein τ-geordnetes IS, so gilt:*

$$x \tau y \Rightarrow x[\mathscr{W}]y.$$

Denn ist $K \in \mathscr{W}$, $x \in K$, $y \notin K$, so ist die Abbildung

$$i\colon K \to (K - \{x\}) \cup \{y\} \qquad \text{mit } i(x) = y,\ i(z) = z \text{ für } z \in K - \{x\}$$

injektiv und erfüllt die Bedingung $z \tau i(z)$ für alle $z \in K$ genau dann, wenn $x \tau y$. In diesem Fall ist daher nach Axiom O $(K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{W}$. Daraus folgt die Behauptung.

2.2. **Satz.** *Das IS $\mathscr{W}$ ist genau dann geordnet, wenn die Quasiordnung $[\mathscr{W}]$ linear ist. In diesem Fall ist $\mathscr{W}$ τ-geordnet bezüglich jeder zu $[\mathscr{W}]$ gehörigen linearen Ordnung τ.*

Beweis. a) $\mathscr{W}$ sei τ-geordnetes IS. Aus dem vorstehenden Lemma erhält man wegen der Linearität von τ auch die von $[\mathscr{W}]$.

b) $\mathscr{W}$ sei IS mit der linearen Quasiordnung $[\mathscr{W}]$; τ sei eine zugehörige lineare Ordnung. Die $|P| = n$ Elemente von P seien so als $x_1, \ldots, x_n$ numeriert, daß $x_j \tau x_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$. Es sei nun $K \in \mathscr{W}$ und i: $K \to K'$ eine injektive Abbildung mit $x \tau i(x)$ für alle $x \in K$. Wenn gezeigt werden kann, daß K' in $\mathscr{W}$ liegt, folgt, daß $\mathscr{W}$ τ-geordnet ist.

Setze $K_0 = K$, und für $j = 0, \ldots, n-1$

$$K_{j+1} = \begin{cases} K_j & \text{falls } x_{n-j} \notin K, \\ (K_j - \{x_{n-j}\}) \cup \{i(x_{n-j})\} & \text{falls } x_{n-j} \in K, \end{cases}$$

also

$$K_j = \{x_k | x_k \in K, 1 \leqq k \leqq n-j\} \cup \{i(x_k) | x_k \in K, n-j < k \leqq n\} \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

Mit der Induktionsannahme $K_j \in \mathscr{W}$ folgt für $x_{n-j} \notin K$: $K_{j+1} = K_j \in \mathscr{W}$. Für $x_{n-j} \in K$, $i(x_{n-j}) \notin K_j$ hat man $K_{j+1} \in \mathscr{W}$ wegen $x_{n-j} [\mathscr{W}]\, i(x_{n-j})$. Ist aber $i(x_{n-j}) \in K_j$, so gibt es wegen der Injektivität von i ein $k \leqq n-j$ mit $i(x_{n-j}) = x_k \tau x_{n-j} \tau i(x_{n-j})$, also $i(x_{n-j}) = x_{n-j}$, $K_{j+1} = K_j \in \mathscr{W}$. Durch Induktion erhält man nun $iK = K_n \in \mathscr{W}$. Daher liegt auch $K' \supseteq iK$ in $\mathscr{W}$.

2.3. $\mathscr{W}$ sei ein IS über P, $\{s_x | x \in P\}$ sei Basis eines $|P|$-dimensionalen reellen Vektorraums. Für $K \subseteq P$ sei

$$s_K := \sum_{x \in K} s_x .$$

Satz. *Das IS $\mathscr{W}$ über der Menge P ist genau dann metrisch, wenn für nichtnegative reelle a_K ($K \subseteq P$) aus*

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K s_K = \sum_{K \notin \mathscr{W}} a_K s_K , \tag{1}$$

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K = \sum_{K \notin \mathscr{W}} a_K , \tag{2}$$

stets $a_K = 0$ für alle $K \subseteq P$ folgt.

Beweis. a) $\mathscr{W}$ sei metrisch, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_{s,q}$. Dann folgen aus (1), (2) die entsprechenden Gleichungen mit $s(K)$ anstelle von s_K, speziell also

$$0 \leqq \sum_{K \in \mathscr{W}} a_K (s(K) - q) = \sum_{K \notin \mathscr{W}} a_K (s(K) - q) .$$

Wegen $s(K) - q < 0$ für $K \notin \mathscr{W}$, $a_K \geqq 0$ folgt $a_K = 0$ für $K \notin \mathscr{W}$, aus (2) dann auch $a_K = 0$ für $K \in \mathscr{W}$.

b) Das Gleichungssystem (1), (2) besitze (für nichtnegative reelle a_K) nur die Lösung $a_K = 0$ für alle $K \subseteq P$, und ∞ sei ein nicht zu P gehöriges Element. (1), (2) sind dann gleichbedeutend mit

$$\sum_{K \subseteq P} t_{xK} a_K = 0 \qquad \text{für } x \in P \cup \{\infty\}, \tag{3}$$

wobei

$$t_{\infty K} = \begin{cases} 1 & \text{für } K \notin \mathscr{W}, \\ -1 & \text{für } K \in \mathscr{W}, \end{cases}$$

$$t_{xK} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K \in \mathscr{W}, \\ -1 & \text{für } x \in K \notin \mathscr{W}, \\ 0 & \text{für } x \notin K . \end{cases} \tag{4}$$

Nun gilt bekanntlich folgendes Lemma (s. z.B. Fan [1], Spezialisierung von Theorem 1):

Lemma. *Besitzt das reelle Gleichungssystem*

$$\sum_k t_{ik} a_k = 0 \qquad (\textit{für alle } i)$$

für nichtnegative a_k nur die triviale Lösung $a_k=0$ (für alle k), so besitzt das Ungleichungssystem

$$\sum_i x_i t_{ik} > 0 \qquad (\text{für alle } k)$$

eine reelle Lösung.

Daher gibt es nach (3) eine Abbildung s von $P \cup \{\infty\}$ in die Menge der reellen Zahlen mit

$$\sum_{x \in P \cup \{\infty\}} s(x)\, t_{xK} > 0 \qquad \text{für alle } K \subseteq P.$$

Setzt man $q = s(\infty)$, so erhält man unter Verwendung von (4):

$$s(K) > q > s(K') \qquad \text{für } K \in \mathscr{W},\ K' \notin \mathscr{W}. \tag{5}$$

Für $\varnothing \in \mathscr{W}$, ist $\mathscr{W}$ die Potenzmenge von P und daher metrisch.

Ist nun $\mathscr{W}$ reduziert, so gibt es zu $x \in P$ ein $K \in \mathscr{W}$ mit $K - \{x\} \notin \mathscr{W}$. Dann ist $s(K) \geqq q > s(K) - s(x)$, also $s(x) > 0$ und wegen $\varnothing \notin \mathscr{W}$ auch $q > 0 = s(\varnothing)$. (5) besagt dann gerade $\mathscr{W} = \mathscr{W}_{s,q}$. Daher ist $\mathscr{W}$ metrisch.

Ist $\mathscr{W}$ aber nicht reduziert, so ist nach 1.4 $\mathscr{W} = (\mathscr{W}_0)_P$ mit einem reduzierten $\mathscr{W}_0$. Für $\mathscr{W}_0$ ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt, also ist $\mathscr{W}_0$ metrisch. Daher ist auch $\mathscr{W}$ metrisch.

3. M-Typ und O-Typ

3.1. Der Durchschnitt von IS über derselben[1] Menge P ist wieder IS über P. Das ergibt sich sofort aus der Definition. Es gilt nun der folgende

Satz. *Jedes Inklusionssystem $\mathscr{W}$ ist Durchschnitt von endlich vielen metrischen (geordneten) Inklusionssystemen.*

Beweis: Es sei $K_0 \notin \mathscr{W}$. Setze

$$t_{xK} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in K - K_0, \\ -1 & \text{wenn } x \in K_0 - K, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Für nichtnegative a_K, b_x folgt dann aus

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} t_{xK}\, a_K + b_x = 0 \qquad \text{für alle } x \in P \tag{6}$$

für $x \notin K_0$:

$$\sum_{x \in K \in \mathscr{W}} a_K + b_x = 0,$$

also $a_K = 0$ für alle $K \in \mathscr{W}$ mit $K - K_0 \neq \varnothing$. Ist aber $K - K_0 = \varnothing$, so ist $K \subseteq K_0$, also $K \notin \mathscr{W}$. Daher ist $a_K = 0$ für alle $K \in \mathscr{W}$. Aus (6) folgt schließlich $b_x = 0$ für alle $x \in P$.

Das Lemma aus 2.3 liefert nun eine Abbildung s von P in die Menge der reellen Zahlen mit

$$s(K) > s(K_0) \qquad \text{für alle } K \in \mathscr{W},$$

$$s(x) > 0 \qquad \text{für alle } x \in P.$$

[1] Nach 1.4 ist für IS $\mathscr{W}_i$ über verschiedenen P_i die folgende „Durchschnitts"-Definition zu verwenden:

$$\bigcap_i \mathscr{W}_i := \{K \subseteq \bigcup_i P_i \mid K \cap P_i \in \mathscr{W}_i \ \text{für alle } i\}.$$

Für

$$q = \operatorname*{Min}_{K \in \mathscr{W}} s(K) > s(K_0)$$

erhält man also ein metrisches IS $\mathscr{W}_{s,q} \supseteq \mathscr{W}$ mit $K_0 \notin \mathscr{W}_{s,q}$. Konstruiert man so zu jedem $K_0 \notin \mathscr{W}$ ein metrisches IS $\mathscr{W}(K_0)$ mit $K_0 \notin \mathscr{W}(K_0) \supseteq \mathscr{W}$, so ist $\mathscr{W}$ der Durchschnitt aller dieser $\mathscr{W}(K_0)$. Da jedes metrische IS zugleich geordnet ist, folgt hieraus auch die Behauptung in den Klammern.

3.2. Der letzte Satz motiviert die

Definition. Ist das IS $\mathscr{W}$ Durchschnitt von n, aber nicht von $n-1$ metrischen (geordneten) IS, so heißt n der M-*Typ* (O-*Typ*) von $\mathscr{W}$.

Die IS vom M-Typ 1 sind damit gerade die metrischen IS, die vom O-Typ 1 gerade die geordneten.

Weil jedes metrische IS geordnet ist, ist der O-Typ eines IS nie größer als sein M-Typ. Ist $\mathscr{W}$ ein IS vom M(O)-Typ n, $\mathscr{W} = \bigcap_1^n \mathscr{W}_i$ mit metrischen (geordneten) $\mathscr{W}_i$, so ist für $r = 1, \ldots, n-1$ das System $\bigcap_1^r \mathscr{W}_i$ ein IS vom M(O)-Typ r.

Satz. *Ist* $|P| \geqq 2n$, *so gibt es Inklusionssysteme über* P *von jedem* $M(O)$-*Typ zwischen* 1 *und* n.

Beweis. Nach den eben gemachten Bemerkungen ist nur noch die Existenz eines IS mit einem O-Typ $\geqq n$ zu zeigen. Dazu seien A und B disjunkte Teilmengen von P mit $|A| = |B| = n$. $\langle A, B \rangle$ habe den O-Typ r, es sei also

$$\langle A, B \rangle = \bigcap_{i=1}^{r} \langle A, B \rangle_{\tau_i}$$

mit linearen Ordnungen τ_i von P ($i = 1, \ldots, r$). Setze

$$\mathscr{Q} := \{A \cup B - \{a, b\} \mid a \in A, b \in B\},$$

$$\mathscr{Q}_i := \mathscr{Q} \cap \langle A, B \rangle_{\tau_i} = \{C \in \mathscr{Q} \mid A \, \tau_i \, C \text{ oder } B \, \tau_i \, C\} \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Angenommen, das größte Element c_i von $A \cup B$ bezüglich τ_i liegt in A. (Liegt es in B, kann man für den folgenden Beweisschritt A und B vertauschen.) Dann ist für alle $a \in A - \{c_i\}$, $b \in B$:

$$B = (B - \{b\}) \cup \{b\} \, \tau_i (B - \{b\}) \cup \{c_i\} \, \tau_i \, A \cup B - \{a, b\},$$

also $A \cup B - \{a, b\} \in \mathscr{Q}_i$. Daher liegen in $\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_i$ höchstens die Elemente $A \cup B - \{c_i, b\}$:

$$|\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_i| \leqq n. \tag{7}$$

Nun ist

$$\varnothing = \mathscr{Q} \cap \langle A, B \rangle = \bigcap_{i=1}^{r} (\mathscr{Q} \cap \langle A, B \rangle_{\tau_i}) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathscr{Q}_i,$$

also

$$\mathscr{Q} = \bigcup_{i=1}^{r} (\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_i)$$

und daher, unter Verwendung von (7)

$$n^2 = |\mathscr{Q}| \leqq \sum_{i=1}^{r} |\mathscr{Q} - \mathscr{Q}_i| \leqq r n.$$

Aus der letzten Ungleichung erhält man $r \geqq n$. Also ist der O-Typ von $\langle A, B\rangle$ mindestens n.

Offenes Problem. Was ist bei gegebenem $|P|$ der größtmögliche M-Typ (O-Typ)?

Offenes Problem. Gibt es zu jedem M-Typ geordnete Inklusionssysteme; allgemeiner: Gibt es zu jedem Paar (m, n) natürlicher Zahlen mit $m \geqq n$ ein IS mit dem M-Typ m und dem O-Typ n?

4. Inklusionssysteme und taktische Konfigurationen

P sei eine endliche Menge, $\mathscr{B}$ ein nichtleeres System von Teilmengen von P.

Satz. *Ist $\mathscr{B}$ Blockmenge einer taktischen Konfiguration über P, und ist $\langle\mathscr{B}\rangle$ geordnet, so gibt es eine Zahl k mit*

$$\mathscr{B} = \{K \subseteq P \mid |K| = k\}.$$

Insbesondere ist $\langle\mathscr{B}\rangle$ dann sogar metrisch.

Bemerkung. Damit wird eine Frage von Pickert [2] (dort nur für metrische Abstimmungssysteme $\langle\mathscr{B}\rangle$ gestellt) negativ beantwortet.

Beweis. $\langle\mathscr{B}\rangle$ sei τ-geordnet. Für $x, y \in P$, $x \neq y$ sei

$$\mathscr{B}_{x,y} := \{K \mid K \in \mathscr{B},\ x \in K,\ y \notin K\}.$$

Dann ist

$$\mathscr{B}_{x,y} = \{K \mid K \in \mathscr{B},\ x \in K\} - \{K \mid \{x, y\} \subseteq K \in \mathscr{B}\}$$

und daher $|\mathscr{B}_{x,y}| = |\mathscr{B}_{y,x}|$. Durch

$$f_{x,y}(K) = (K - \{x\}) \cup \{y\} \qquad \text{für alle } K \in \mathscr{B}_{x,y}$$

wird eine injektive Abbildung von $\mathscr{B}_{x,y}$ definiert mit $|K| = |f_{x,y}(K)|$ für alle $K \in \mathscr{B}_{x,y}$. Ist nun $x \tau y$, so erhält man für $K \in \mathscr{B}_{x,y}$ nach dem Lemma aus 2.1 $f_{x,y}(K) \in \langle\mathscr{B}\rangle$ und daher $f_{x,y}(K) \in \mathscr{B}$, also $f_{x,y}(K) \in \mathscr{B}_{y,x}$. Somit ist $f_{x,y}$ im Falle $x \tau y$ eine Bijektion von $\mathscr{B}_{x,y}$ auf $\mathscr{B}_{y,x}$. Da $f_{y,x}$ die Umkehrabbildung zu $f_{x,y}$ ist, erweist sich die Einschränkung $x \tau y$ wegen der Linearität von τ als unnötig. Damit hat man für alle $x, y \in P$:

$$K \in \mathscr{B},\ x \in K,\ y \notin K \Rightarrow (K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{B} \tag{8}$$

(„auswechseln von x gegen y").

Durch einen trivialen Induktionsschluß erhält man nun, daß mit einer k-Teilmenge alle k-Teilmengen von P in $\mathscr{B}$ liegen. Das ergibt die erste Behauptung. Der Rest folgt aus

$$\langle\mathscr{B}\rangle = \mathscr{W}_{s,q} \qquad \text{mit } q = k,\ s(x) = 1 \ \text{ für alle } x \in P,$$

was man unmittelbar nachprüft.

Offenes Problem. Zusammenhang zwischen den Parametern einer taktischen Konfiguration mit der Blockmenge $\mathscr{B}$ und den Typen des zugehörigen Inklusionssystems $\langle\mathscr{B}\rangle$?

5. Abstimmungssysteme. Vetorecht

5.1. **Definition** (Pickert [2]). Ein IS $\mathscr{W}$ über P heißt *Abstimmungssystem (über P)*, kurz AS, wenn eine der beiden folgenden, gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:

$$K\in\mathscr{W}\Rightarrow P-K\notin\mathscr{W} \qquad \text{(Axiom A 1)},$$

$$K,K'\in\mathscr{W}\Rightarrow K\cap K'\neq\varnothing \qquad \text{(Axiom A 2)}.$$

Beweis der Gleichwertigkeit. Aus $K,K'\in\mathscr{W}$, $K\cap K'=\varnothing$ folgt $K'\subseteq P-K$, also $P-K\in\mathscr{W}$. Umgekehrt: Aus $K\in\mathscr{W}$, $P-K\in\mathscr{W}$ folgt wegen $K\cap(P-K)=\varnothing$, daß A 2 nicht gilt. Daher sind A 1 und A 2 äquivalent.

Beispiel. Jedes metrische IS $\mathscr{W}_{s,q}$ mit $q>\frac{1}{2}s(P)$ ist ein AS. Denn ist $K\in\mathscr{W}$, so ist $s(K)\geqq q>\frac{1}{2}s(P)$, also $s(P-K)=s(P)-s(K)<\frac{1}{2}s(P)<q$ und deshalb $P-K\notin\mathscr{W}$. (Übrigens gibt es zu jedem metrischen *Abstimmungs*system $\mathscr{W}_{s,q}$ ein $q'>\frac{1}{2}s(P)$ mit $\mathscr{W}_{s,q}=\mathscr{W}_{s,q'}$.)

Ist $\mathscr{W}$ ein AS, so auch $\mathscr{W}_{P'}$ (für $P\subseteq P'$).

5.2. Der Durchschnitt von Abstimmungssystemen ist wieder ein solches. Deshalb die

Definition. Ein AS $\mathscr{W}$ heißt M'(O')-*darstellbar*, wenn es Durchschnitt von endlich vielen metrischen (geordneten) Abstimmungssystemen ist; ist $\mathscr{W}$ dann Durchschnitt von n, aber nicht von $n-1$ metrischen (geordneten) AS, so heißt n der M'(O')-*Typ* von $\mathscr{W}$. Ist dagegen $\mathscr{W}$ nicht M'(O')-darstellbar, so wird $\mathscr{W}$ der M'(O')-Typ ∞ zugeordnet.

Der M(O)-Typ eines AS ist nie größer als sein M'(O')-Typ. Wie in 3.2 zeigt man, daß es zu jedem M'(O')-Typ $r\leqq n$ ein AS gibt, wenn ein AS vom M'(O')-Typ $n\neq\infty$ existiert.

Beispiele von AS vom Typ ∞ werden weiter unten gegeben.

5.3. Von einem $x\in P$ soll gesagt werden, es habe *Vetorecht* im IS $\mathscr{W}$, wenn $x\in K$ für alle $K\in\mathscr{W}$. Ein IS, in dem wenigstens ein Element Vetorecht besitzt, ist ein AS (nach Axiom A 2). Ein solches AS heißt AS mit *Vetorecht*.

P sei eine endliche Menge, $x_0\notin P$, $P_0=P\cup\{x_0\}$. Für den Augenblick bezeichne $\mathscr{I}$ bzw. $\mathscr{I}_0$ die Menge der IS über P bzw. P_0 und $\mathscr{A}_0$ sei die Menge der AS über P_0, in denen x_0 Vetorecht besitzt. Die Abbildung

$$\alpha:\mathscr{I}\to\mathscr{A}_0:\ \mathscr{W}\to\{K\cup\{x_0\}\,|\,K\in\mathscr{W}\}$$

ist bijektiv mit der Umkehrabbildung $\alpha^{-1}=\alpha_0|\mathscr{A}_0$, wobei

$$\alpha_0:\mathscr{I}_0\to\mathscr{I}:\ \mathscr{W}_0\to\{K_0\cap P\,|\,K_0\in\mathscr{W}_0\}.$$

Lemma. a) $\alpha\left(\bigcap_{i=1}^r\mathscr{W}_i\right)=\bigcap_{i=1}^r\alpha(\mathscr{W}_i)$, *falls* $\mathscr{W}_i\in\mathscr{I}$ $(i=1,\ldots,r)$.

b) $\alpha_0\left(\bigcap_{i=1}^r\mathscr{W}_{0i}\right)=\bigcap_{i=1}^r\alpha_0(\mathscr{W}_{0i})$, *falls* $\mathscr{W}_{0i}\in\mathscr{I}_0$ $(i=1,\ldots,r)$.

Beweis. a) ist trivial, ebenso die $\subseteq$-Inklusion in b).

Liegt K in $\bigcap_{i=1}^r\alpha_0(\mathscr{W}_{0i})$, so ist $K\in\alpha_0(\mathscr{W}_{0i})$ für alle i. Daher gibt es Mengen $K_{0i}\in\mathscr{W}_{0i}$ mit $K=K_{0i}\cap P$. Es muß also K_{0i} entweder $=K$ oder $=K\cup\{x_0\}$

sein. In beiden Fällen ist dann $K \cup \{x_0\} \in \mathscr{W}_{0i}$ für alle i, also liegt $K \cup \{x_0\}$ in $\bigcap_{i=1}^{r} \mathscr{W}_{0i}$. Daraus folgt auch die $\supseteq$-Inklusion von b).

Nun prüft man leicht folgende Aussagen nach:

Ist $\mathscr{W}$ τ-geordnet, so ist $\alpha(\mathscr{W})$ τ_0-geordnet mit

$$x \tau_0 y \Leftrightarrow x \tau y \quad \textit{für } x, y \in P \quad \textit{oder} \quad x \tau_0 x_0 \quad \textit{für } x \in P_0.$$

Ist $\mathscr{W}_0$ τ_0-geordnet, so ist $\alpha_0(\mathscr{W}_0)$ τ-geordnet mit

$$x \tau y \Leftrightarrow x \tau_0 y \qquad \textit{für } x, y \in P.$$

$\alpha(\mathscr{W}_{s,q}) = \mathscr{W}_{s_0, q_0}$ *mit* $q_0 = q + s(P) + 1$,

$$s_0(x) = s(x) \quad \textit{für } x \in P, \qquad s_0(x_0) = s(P) + 1.$$

Für $\mathscr{W}_0 \in \mathscr{A}_0$, $\mathscr{W}_0 = \mathscr{W}_{s_0, q_0}$ *ist* $\alpha_0(\mathscr{W}_0) = \mathscr{W}_{s,q}$ *mit*

$$q = \max(q_0 - s_0(x_0), 0), \qquad s(x) = s_0(x) \quad \textit{für } x \in P.$$

Daraus folgt mit Hilfe des Lemma und mit Satz 3.1 sofort der

Satz. *Ist $\mathscr{W}_0$ ein AS über P_0 mit Vetorecht, so ist $\mathscr{W}_0$ $M'(O')$-darstellbar; genauer ist der $M'(O')$-Typ von $\mathscr{W}_0$ gleich dem $M(O)$-Typ von $\alpha_0(\mathscr{W}_0)$, wenn $x_0 \in P_0$ Vetorecht in $\mathscr{W}_0$ besitzt.*

Aus dem Satz in 3.2 erhält man dann die

Folgerung. *Ist $|P| \geqq 2n+1$, so gibt es über P Abstimmungssysteme von jedem* M'(O')-*Typ ziwschen* 1 *und* n.

6. Notwendige Bedingungen für die M'- und O'-Darstellbarkeit

6.1. $\mathscr{W}$ sei ein (im folgenden festes) AS über P. Die Relationen $|, \|$ von P seien definiert durch

$$x | y :\Leftrightarrow \text{Es gibt } K_1, K_2 \in \mathscr{W} \text{ mit } x \notin K_1 \cup K_2, \{y\} = K_1 \cap K_2;$$
$$x \| y :\Leftrightarrow \text{Es gibt } x_1, \ldots, x_n \ (n \geqq 2) \text{ mit } x = x_1 | x_2 | \ldots | x_n = y.$$

Nach Konstruktion ist $\|$ die transitive Hülle von $|$.

Satz. a) *Ist $\mathscr{W}$ in einem τ-geordneten AS enthalten, so gilt:*

$$x \| y \Rightarrow x \tau y \qquad (x, y \in P). \tag{9}$$

b) *Ist $\mathscr{W}$ in einem geordneten AS enthalten, so gilt:*

$$x \nparallel x \quad \textit{für alle } x \in P. \tag{10}$$

c) *Ist $\mathscr{W}$ O'-darstellbar, so gilt:*

$$x \| y \Rightarrow x [\mathscr{W}] y \qquad (x, y \in P) \tag{11}$$

(*mit der in* 2.1 *eingeführten Quasiordnung* $[\mathscr{W}]$).

Beweis. a) Es sei $x|y$. Nach Definition gibt es $K_1, K_2 \in \mathscr{W}$ mit $x \notin K_1 \cup K_2$, $\{y\} = K_1 \cap K_2$. Wäre $y \tau x$, so würde wegen $y \in K_1$, $x \notin K_1$ auch $(K_1 - \{y\}) \cup \{x\}$

in jedem $\mathscr{W}$ enthaltenden AS liegen. Es ist aber $K_2 \cap ((K_1 - \{y\}) \cup \{x\}) = K_2 \cap (K_1 - \{y\}) = \varnothing$ nach Voraussetzung. Dieser Widerspruch zu A2 ergibt wegen der Linearität von τ die Folgerung $x \tau y$. Die Behauptung erhält man nun aus der Definition von $\|$ und der Transitivität von τ.

b) Nach Definition ist $x|x$ unmöglich. Wäre also $x \| x$, so gäbe es ein $y \neq x$ mit $x \| y \| x$. Nach a) folgt $x \tau y \tau x$ und wegen der Antisymmetrie von τ der Widerspruch $x = y$.

c) Es sei $\mathscr{W} = \bigcap_{i=1}^r \mathscr{W}_i$ mit τ_i-geordneten AS $\mathscr{W}_i$. Aus $x \| y$ folgt nach a) $x \tau_i y$, daraus nach 2.1 weiter $x [\mathscr{W}_i] y$ für alle i. Ist also $K \in \mathscr{W}$, $x \in K$, $y \notin K$, so ist zunächst $K \in \mathscr{W}_i$ für alle i, also wegen $x [\mathscr{W}_i] y$ auch $(K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{W}_i$ für alle i, und daher $(K - \{x\}) \cup \{y\} \in \mathscr{W}$. Also ist $x [\mathscr{W}] y$.

Offenes Problem. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen sind die notwendigen Bedingungen (9), (10), (11) des Satzes auch hinreichend?

6.2. **Satz.** *Das Abstimmungssystem $\mathscr{W}$ über P ist genau dann in einem metrischen Abstimmungssystem enthalten, wenn jedes der folgenden, gleichwertigen Gleichungssysteme*

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K s_K = \tfrac{1}{2} \Big(\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K \Big) s_P, \tag{12}$$

$$\sum_{x \in K \in \mathscr{W}} a_K = \tfrac{1}{2} \Big(\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K \Big) \quad (\textit{für alle } x \in P), \tag{13}$$

$$\sum_{x \in K \in \mathscr{W}} a_K = \sum_{x \notin K \in \mathscr{W}} a_K \quad (\textit{für alle } x \in P) \tag{14}$$

unter der Nebenbedingung $a_K \geqq 0$ (für alle $K \in \mathscr{W}$) nur die Lösung $a_K = 0$ (für alle $K \in \mathscr{W}$) besitzt. (Bezeichnungen wie in 2.3.)

Beweis. a) $\mathscr{W}_{s,q}$ sei ein $\mathscr{W}$ enthaltendes AS, $q > \frac{1}{2} s(P)$. Ist $a_K \geqq 0$ für alle $K \in \mathscr{W}$, so ist

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K s(K) \geqq \sum_{K \in \mathscr{W}} a_K q \geqq \Big(\sum_{K \in \mathscr{W}} a_K \Big) \cdot \tfrac{1}{2} s(P),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im Falle $a_K = 0$ für alle $K \in \mathscr{W}$ gilt. Daher kann (12) nur die triviale Lösung besitzen.

b) Mit

$$t_{xK} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K, \\ -1 & \text{für } x \notin K \end{cases}$$

wird aus (14)

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} t_{xK} a_K = 0 \quad \text{für alle } x \in P. \tag{15}$$

Angenommen, das Gleichungssystem

$$\sum_{K \in \mathscr{W}} t_{xK} a_K + b_x = 0 \quad \text{für alle } x \in P \tag{16}$$

besitzt eine nichttriviale Lösung mit $a_K \geqq 0$, $b_x \geqq 0$ (für alle $K \in \mathscr{W}$, $x \in P$). Ist $b_x > 0$, so gibt es wegen

$$\sum_{x \notin K \in \mathscr{W}} a_K = b_x + \sum_{x \in K \in \mathscr{W}} a_K > 0$$

ein $K \in \mathscr{W}$ mit $x \notin K$, $a_K > 0$.

Wenn $a_K < \frac{1}{2} b_x$ ist, so wird b_x durch $b_x - 2a_K$, a_K durch 0 und $a_{K\cup\{x\}}$ durch $a_{K\cup\{x\}} + a_K$ ersetzt. Man erhält auf diese Weise wieder eine nichttriviale Lösung von (16)[2]. Diese Substitution kann man (in endlich vielen Schritten, da nur endlich viele $K \in \mathscr{W}$ existieren mit $x \notin K$, $a_K > 0$, und deren Anzahl in jedem Schritt abnimmt) so lange wiederholen, bis man ein $K \in \mathscr{W}$ mit $x \notin K$, $a_K \geqq \frac{1}{2} b_x$ findet. Dann ersetzt man b_x durch 0, a_K durch $a_K - \frac{1}{2} b_x$ und $a_{K\cup\{x\}}$ durch $a_{K\cup\{x\}} + \frac{1}{2} b_x$.[2] Führt man dieses Verfahren für alle $x \in P$ durch, so erhält man eine nichttriviale Lösung von (15). Also: Besitzt (14) nur die triviale Lösung, so auch (16). Das Lemma in 2.3 liefert nun die Existenz einer reellwertigen, auf P definierten Funktion s mit

$$\sum_{x\in P} s(x)\, t_{xK} > 0 \quad \text{für alle } K \in \mathscr{W}; \qquad s(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in P,$$

also

$$s(K) > \tfrac{1}{2} s(P) \quad \text{für alle } K \in \mathscr{W}.$$

Setzt man nun

$$q = \operatorname*{Min}_{K\in\mathscr{W}} s(K),$$

so ist $\mathscr{W}_{s,q}$ ein metrisches AS, das $\mathscr{W}$ enthält.

Offenes Problem. Angabe von über (11) und (12) hinausgehenden Bedingungen für die M'-Darstellbarkeit von AS.

Offenes Problem. Ist jedes geordnete AS, das in einem metrischen AS enthalten ist, M'-darstellbar?

7. Beispiele

7.1. *Beispiel eines geordneten, nichtmetrischen IS.*

Es sei $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und τ die natürliche Ordnung in P. Setze

$$K = \{1, 3, 5\}, \qquad L = \{2, 4, 6\}, \qquad M = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad N = \{5, 6\}.$$

Das IS

$$\mathscr{W} := \langle K \rangle_\tau$$

ist geordnet, und es ist $K, L \in \mathscr{W}$, $M, N \notin \mathscr{W}$. Aus

$$s_K + s_L = s_M + s_N$$

folgt daher nach 2.3, daß $\mathscr{W}$ nichtmetrisch ist.

7.2. *Beispiel eines AS, das in keinem geordneten AS enthalten ist.*

Es sei wieder $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Setze

$$K = \{1, 2, 3\}, \qquad L = \{1, 4, 5\}, \qquad M = \{2, 4, 6\}, \qquad N = \{3, 5, 6\}.$$

$$\mathscr{W} := \langle K, L, M, N \rangle$$

ist AS[3]. Es ist

$$6 | 1 \quad \text{wegen } 6 \notin K \cup L, \qquad \{1\} = K \cap L,$$

$$1 | 6 \quad \text{wegen } 1 \notin M \cup N, \qquad \{6\} = M \cap N,$$

also $6 \| 6$. Nach 6.1 b ist $\mathscr{W}$ daher in keinem geordneten AS enthalten.

[2] Für alle $z \in P$ bleibt bei dieser Substitution der Ausdruck

$$b_z + t_{zK}\, a_K + t_{zK\cup\{x\}}\, a_{K\cup\{x\}}$$

unverändert (wie man leicht nachrechnet), die linke Seite in (16) ändert also ihren Wert nicht.

[3] Axiom A 2 kann man direkt nachrechnen.

7.3. *Beispiel eines AS, das nicht O'-darstellbar ist, aber in einem geordneten AS liegt.*

Es sei $P=\{1,2,3,4,5,6\}$ und τ die natürliche Ordnung in P. Setze

$$K=\{2,4,6\},\quad L=\{3,4,5\},\quad M=\{1,5,6\},\quad N=\{4,5,6\}.$$

$$\mathscr{W}:=\langle K,L,M\rangle$$

ist AS^3. Es ist $1|4$ wegen $1\notin K\cup L$, $\{4\}=K\cap L$; wegen $M\in\mathscr{W}$, $N\notin\mathscr{W}$ dagegen nicht $1\,[\mathscr{W}]\,4$. Nach 6.1c ist also $\mathscr{W}$ nicht O'-darstellbar. Andrerseits ist $\mathscr{W}$ in dem geordneten AS^3 $\langle\mathscr{W}\rangle_\tau$ enthalten.

7.4. *Beispiel eines geordneten AS, das in keinem metrischen AS enthalten ist.*

Es sei $P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ und τ die natürliche Ordnung in P. Setze

$$K=\{1,2,7,8\},\quad L=\{3,4,7,9\},\quad M=\{5,6,8,9\},\quad N=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

$$\mathscr{W}:=\langle K,L,M,N\rangle_\tau$$

ist geordnetes AS^3. Aus

$$s_K+s_L+s_M+s_N=2\,s_P$$

folgt nach 6.2, daß $\mathscr{W}$ in keinem metrischen AS enthalten ist.

Literatur

1. Fan, K.: On Systems of Linear Inequalities. In: Linear Inequalities and Related Systems, pp. 99–156. Annals of Math. Studies **38**. Princeton: Princeton University Press 1956
2. Pickert, G.: Abstimmungssysteme und taktische Konfigurationen. Erscheint in Colloquio internazionale sulle Teorie Combinatorie, Atti dei Convegni Lincei, Roma 1975

Arnold Neumaier
D-1000 Berlin 65
Seestr. 117

(Eingegangen am 9. Mai 1974)