A. NEUMAIER

AFFINE EBENEN UND TUPELSYSTEME

ZUSAMMENFASSUNG. Es werden zwei neue Koordinatisierungsmethoden für affine Ebenen gegeben, und zwar durch homogene bzw. stark balancierte Tupelsysteme. Ihre Brauchbarkeit wird u.a. demonstriert an einer Charakterisierung der Kollineationsgruppen einer affinen Ebene mit der Eigenschaft (R) Für alle $i \in l_\infty$ enthält der Stabilisator von i nur Perspektivitäten mit Zentrum i. Außerdem wird der Satz bewiesen: Für eine Elation der geraden Ordnung d in einer projektiven Ebene der Ordnung v gilt $2d|v$. Dieses Resultat impliziert schon bekannte Ergebnisse von Hughes ($d = 2$) und Hall.

ABSTRACT. We give two new coordinatization methods for affine planes by means of homogeneous (resp. strong balanced) tuple systems. Their usefulness is demonstrated by proving a characterization of collineation groups of an affine plane with the property (R): The stabilizer of every $i \in l_\infty$ contains only perspectivities with centre i. Besides, we prove: If a projective plane of order v contains an elation of even order d then $2d|v$. This implies known results of Hughes ($d = 2$) and Hall.

AMS/MOS Subject Classification: 50D30, secondary 05B15.
Key Words and Phrases: affine plane, perspectivity, elation, homogeneous tuple system, strong balanced tuple system, screen.

0. EINFÜHRUNG

Zur Koordinatisierung affiner Ebenen definieren wir zunächst in Abschnitt 1 homogene und stark balancierte Tupelsysteme (HTS und SBTS). Außer einigen einfachen Eigenschaften von Tupelsystemen führen wir den wichtigen Begriff der Isotopie ein, und definieren Autotopismen von Tupelsystemen.

Der. 2. Abschnitt klassifiziert HTS nach den möglichen Gruppen freier Automorphismen (Satz 1).

Im 3. Abschnitt beweisen wir (Satz 2) den entscheidenden Zusammenhang zwischen affinen Ebenen, $(v, v + 1, 1)$-HTS, Kollineationsgruppen der Ebene und der Autotopismengruppe des HTS. Wesentliches Hilfsmittel dafür ist der Begriff des Rasters einer affinen Ebene.

Abschnitt 4 wendet die Ergebnisse von Abschnitt 2 an auf die mit einem Raster verträglichen Kollineationsgruppen einer affinen Ebene, und charakterisiert sie auf zweifache Weise. Das führt zu einer Bestimmung der möglichen Typen von Kollineationsgruppen mit der Eigenschaft (R): Der Stabilisator jedes Punktes $i \in l_\infty$ besteht aus lauter Perspektivitäten mit Zentrum i (Satz 4).

In Abschnitt 5 wird ein Zusammenhang zwischen affinen Ebenen und $(v, v, 1)$-SBTS bewiesen. Als Anwendung wird gezeigt, daß in einer projektiven Ebene der Ordnung v für eine Elation der geraden Ordnung d die Beziehung $2d|v$ gilt (Satz 7). Als Spezialfälle erhält man bekannte Nichtexistenzkriterien für Elationen gerader Ordnung.

Geometriae Dedicata 8 (1979) 189–205. 0046–5755/79/0082–0189$02.55

Die bewiesenen Sätze (Satz 4 und 7) zeigen, daß HTS und SBTS brauchbare Hilfsmittel zur Untersuchung endlicher Ebenen darstellen. Analog zur Koordinatisierung von affinen Ebenen kann man allgemeiner beliebige (v, k)-Netze durch ein $(v, k, 1)$-HTS koordinatisieren. Dafür, und für andere Ergebnisse über HTS und SBTS siehe [6].

Ein paar Bemerkungen zur Schreibweise: Die Zahl der Elemente einer endlichen Menge P wird mit $|P|$ bezeichnet. Eine v-Menge ist eine Menge mit genau v Elementen. Ein Element von $P^k = P \times P \times \cdots \times P$ (k Faktoren) nennen wir ein k-Tupel, oder kurz ein Tupel (über P); wir bezeichnen Tupel mit den Buchstaben x, y, z. Wir schreiben $x = (x_1, \ldots, x_k) = (x_i : i = 1, \ldots, k)$, und $x = (x_i : i \in I)$, wenn wir statt $I_k = \{1, \ldots, k\}$ eine andere k-Menge I als Indexmenge haben. Auf das Element x_i verweisen wir als den Eintrag von x an der Stelle i.

Projektive Ebenen bezeichnen wir mit $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$, wobei $\mathscr{P}$ die Punktmenge und $\mathscr{B}$ die Geradenmenge der Ebene ist. Inzidenz des Punktes P mit der Garaden l schreiben wir als $P \in l$ oder $l \ni P$. Ist l_∞ eine feste Gerade von $\mathscr{B}$, so bezeichnen wir mit $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ die zu $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$ gehörige affine Ebene mit uneigentlicher Geraden l_∞. Affine Geraden bezeichnen wir mit den Buchstaben l, m, n, affine Punkte mit P, Q, und uneigentliche Punkte mit i, j. Unter einer Kollineation von $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ verstehen wir eine l_∞ festlassende Kollineation von $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$.

Im übrigen halten wir uns an die Definitionen und Bezeichnungen in Hughes/Piper [4].

1. Homogene und stark balancierte Tupelsysteme

v, k seien natürliche Zahlen, $v \geqslant 2$, $k \geqslant 2$.

P sei eine v-Menge, deren Elemente wir Punkte nennen. Unter einem (v, k)-*Tupelsystem* Q über P verstehen wir eine Teilmenge von P^k.

DEFINITION. Ein $(v, k, 1)$-HTS (*homogenes Tupelsystem*) über P ist ein (v, k)-Tupelsystem Q über P mit der Eigenschaft (HTS). Zu je zwei Punkten $a, b \in P$ und je zwei verschiedenen Stellen $i, j \in I$ gibt es genau ein Tupel $x \in Q$ mit $x_i = a$, $x_j = b$. Q heißt *idempotent*, wenn gilt:

(I) $(a, \ldots, a) \in Q$ für alle $a \in P$.

Eine *Transversale* von Q ist eine Teilmenge von Q mit der Eigenschaft

(T) Zu jedem Punkt $a \in P$ und jeder Stelle $i \in I$ gibt es genau ein Tupel $x \in T$ mit $x_i = a$.

Offensichtlich gilt:

1.1. *Ist Q ein idempotentes homogenes Tupelsystem, so ist $T = \{(a, \ldots, a) \mid a \in P\}$ eine Transversale von Q.*

DEFINITION. Ein $(v, k, 1)$-SBTS (*stark balanciertes Tupelsystem*) über P ist ein (v, k)-Tupelsystem Q über P mit den Eigenschaften

(SBTS1) Aus $x \in Q$, $i, j \in I$, $i \neq j$ folgt $x_i \neq x_j$;

(SBTS2) Zu je zwei verschiedene Punkten $a, b \in P$ und je zwei verschiedenen Stellen $i, j \in I$ gibt es genau ein Tupel $x \in Q$ mit $x_i = a$, $x_j = b$.

Zwischen idempotenten HTS und SBTS besteht der folgende triviale Zusammenhang:

1.2. *Ist Q ein $(v, k, 1)$-SBTS über P, so ist $Q \cup \{(a, \ldots, a) \mid a \in P\}$ ein idempotentes $(v, k, 1)$-HTS über P; umgekehrt erhält man aus einem idempotenten $(v, k, 1)$-HTS Q^* über P ein $(v, k, 1)$-SBTS durch $Q = Q^* - \{(a, \ldots, a) \mid a \in P\}$.*

1.3. *Es sei Q ein $(v, k, 1)$-HTS(SBTS) über P, und I_0 eine k_0-Teilmenge von I, $2 \leqslant k_0 < k$. Dann ist $Q^{(I_0)} = \{(x_i : i \in I_0) \mid x \in Q\}$ ein $(v, k_0, 1)$-HTS(SBTS) über P. Im Fall eines HTS ist außerdem für jedes $a \in P$, $l \in I - I_0$ das Tupelsystem $T_{a,l} = \{(x_i : i \in I_0) \mid x \in Q, x_l = a\}$ eine Transversale von $Q^{(I_0)}$.*

Wir führen nun eine Äquivalenz zwischen Tupelsystemen ein:

DEFINITION. Q, Q' seien (v, k)-Tupelsysteme über P bzw. P'. Ein Paar (α, Π), bestehend aus einer Permutation α von I und einem k-Tupel $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ von Bijektionen $\pi_i : P \to P'$ heißt ein *Isotopismus* von Q auf Q', wenn mit der Abkürzung

$$(1) \qquad (a, \Pi)x = (\pi_{\alpha^{-1}i} x_{\alpha^{-1}i} : i \in I)$$

gilt:

$$(2) \qquad x \in Q \Leftrightarrow (\alpha, \Pi)x \in Q'.$$

Q und Q' heißen *isotop*, wenn ein Isotopismus von Q auf Q' existiert.

Falls $\pi_i = \pi$ für alle $i \in I$, so schreiben wir π statt $(\pi, \ldots, \pi)$ und nennen (α, π) einen *Isomorphismus*.

1.4. *Die Isotopie ist eine Äquivalenzrelation. Ein Isotopismus bildet ein $(v, k, 1)$-HTS Q wieder auf ein $(v, k, 1)$-HTS Q' ab, und eine Transversale von Q geht dabei in eine Transversale von Q' über.*

1.5. *Die Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Ein Isomorphismus bildet auch ein $(v, k, 1)$-SBTS auf ein $(v, k, 1)$-SBTS ab; außerdem wird ein idempotentes HTS wieder in ein solches übergeführt.*

Wir beweisen nun:

1.6. *Ein HTS ist genau dann zu einem idempotenten HTS isotop, wenn es eine Transversale enthält.*

Ist nämlich Q ein idempotentes HTS, so enthält es nach 1.1 eine Transversale; daher enthält auch jedes isotope Bild von Q eine Transversale. Ist umgekehrt T eine Transversale des $(v, k, 1)$-HTS Q über P, so enthält T wegen (T) genau v Elemente. Daher kann man die Tupel in T so numerieren, daß $T = \{x^a \mid a \in P\}$ wird. Wegen (T) ist dann für alle $i \in I$ die Abbildung $\pi_i: a \to (x^a)_i$ (für $a \in P$) eine Permutation von P, und mit $\Pi = (\pi_1^{-1}, \ldots, \pi_k^{-1})$ ergibt sich $(1, \Pi)x^a = (\pi_i^{-1}(x^a)_i : i \in I) = (a : i \in I)$. Also ist $(a, \ldots, a) \in (1, \Pi)Q$ für alle $a \in P$, und $(1, \Pi)Q$ ist idempotent, und nach 1.4 wieder ein HTS.

1.7. (a) *Q sei ein $(v, k, 1)$-SBTS. Dann gilt $v \geqslant k$, und Q enthält geneau $v(v-1)$ Tupel.* (b) *Q sei ein $(v, k, 1)$-HTS. Dann enthält Q genau v^2 Tupel. Falls Q eine Transversale enthält, insbesondere also wenn Q idempotent ist, gilt $v \geqslant k$.*

Denn aus (SBTS1) ergibt sich sofort $v \geqslant k$, und aus (SBTS2) ergibt sich die Zahl der Tupel zu $v(v-1)$, da für festes $i, j \in I$ für a genau v, und dann für b genau $v-1$ Möglichkeiten bestehen. Ebenso ergibt sich aus (HTS), daß ein $(v, k, 1)$-HTS Q genau v^2 Tupel enthält. Enthält Q eine Transversale, so ist es nach 1.6 zu einem idempotenten $(v, k, 1)$-HTS isotop, und aus 1.2 und Teil a ergibt sich dann $v \geqslant k$.

DEFINITION. Ein *Autotopismus* eines Tupelsystems Q ist ein Isotopismus von Q auf sich selbst. Ein Autotopismus (α, Π) heißt *rein*, wenn $\alpha = 1$. (Wir schreiben dann Π statt $(1, \Pi)$). Ein *Automorphismus* von Q ist ein Isomorphismus von Q auf sich selbst. Ein Automorphismus (α, π) heißt *rein*, wenn $\alpha = 1$ (wir schreiben dann π statt $(1, \pi)$), und *frei*, wenn $\pi = 1$ (wir schreiben dann α statt $(\alpha, 1)$).

Es ist also für einen reinen Automorphismus $\pi: \pi x = (\pi x_i : i \in I)$, für einen freien Automorphismus $\alpha: \alpha x = (x_{\alpha^{-1}i} : i \in I)$, und für einen beliebigen Automorphismus (α, π): $(\alpha, \pi)x = (\pi x_{\alpha^{-1}i} : i \in I)$.

1.8. *Die Autotopismen eines Tupelsystems Q bilden eine Gruppe* $\mathrm{Aut}_0(Q)$ *bezüglich der Operation* $(\alpha, \Pi)\cdot(\alpha', \Pi') = (\alpha\alpha', \Pi^*)$, *wobei* $\Pi^* = (\pi_{\alpha' i}\pi_i' : i \in I)$ *ist. Die reinen Autotopismen bilden einen Normalteiler* $\mathrm{Aut}_{0r}(Q)$ *von* $\mathrm{Aut}_0(Q)$. *Die Automorphismen von Q bilden eine Untergruppe* $\mathrm{Aut}(Q)$ *von* $\mathrm{Aut}_0(Q)$*; die reinen (freien) Automorphismen von Q bilden elementweise vertauschbare Normalteiler* $\mathrm{Aut}_r(Q)$ *(bzw.* $\mathrm{Aut}_f(Q)$*). Ist G eine Gruppe freier Automorphismen von Q, so sagen wir, Q sei ein $(v, k, 1; G)$-HTS.*

Beispiel. K sei (additive) abelsche Gruppe der Ordnung v. Das Tupelsystem $Q = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in K, a + b + c = 0\}$ ist ein $(v, 3, 1; S_3)$-HTS. Jede Permutation der Stellen 1, 2, 3 ist ein freier Automorphismus von Q, und jeder Automorphismus von K ist ein reiner Automorphismus. Für beliebige t_1, t_2, t_3 K ist $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ mit den Permutationen $\pi_i: a \to t_i$ $(i = 1, 2, 3)$

ein reiner Autotopismus. Falls v ungerade ist, ist z.B. $T = \{(a, a, -2a) \mid a \in K\}$ eine Transversale von Q.

2. Klassifikation von homogenen Tupelsystemen

In diesem Abschnitt wollen wir die homogenen Tupelsysteme nach den möglichen Gruppen freier Automorphismen klassifizieren. Ziel ist der Beweis von

SATZ 1. Q sei ein $(v, k, 1; G)$-HTS. Dann tritt einer der folgenden vier Fälle auf:

Fall 1: Q ist isotop zu einem idempotenten $(v, k, 1; G)$-HTS.

Fall 2: G läßt eine Stelle fest und operiert semiregulär auf den übrigen Stellen.

Fall 3: G operiert semiregulär auf den Stellen.

Fall 4: G enthält einen auf den Stellen semiregulären abelschen Normalteiler N von ungerader Ordnung und Index 2. G enthält ein Element α der Ordnung 2 mit der Eigenschaft $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in N$. α läßt genau eine N-Bahn I_0 von I fest und permutiert die übrigen N-Bahnen von I. Es ist $G = N \cup \alpha N$, und jedes Element von αN läßt genau eine Stelle aus I_0 fest.

Der Beweis geschieht in mehreren Schritten. Trivial, aber grundlegend ist

2.1. *Q sei ein $(v, k, 1)$-HTS. Sind dann $x, y \in Q$ zwei Tupel mit $x_i = y_i$, $x_j = y_j$ für zwei verschiedene Stellen i, j, so ist $x = y$.*

Wir behandeln nun zunächst einen wichtigen Spezialfall des Satzes.

2.2. *N sei eine Gruppe der Ordnung k, A sei eine Gruppe fixpunktfreier Automorphismen von N, und G sei die Gruppe der Abbildungen $i \to mi^t$ $(i \in N)$ für $m \in N$, $t \in A$. Ist dann Q ein $(v, k, 1; G)$-HTS über P und $|A| \geqslant 3$, so ist Q idempotent.*

Beweis. Wegen $|A| \geqslant 3$ enthält A zwei verschiedene Automorphismen $r, s \neq 1$. Da nach Voraussetzung s und $r^{-1}s$ fixpunktfrei sind, sind die Abbildungen $\sigma: i \to i^s i^{-1}$, $\tau: i \to i^s(i^r)^{-1}$ Permutationen. Wir wählen nun ein $n \in N - \{1\}$, und ein beliebiges $a \in P$. Da r fixpunktfrei ist, ist $n^r \neq n$, und nach (HTS) gibt es ein $x \in Q$ mit $x_n = x_{n^r} = a$.

Die Substitution $\alpha: i \to i^r$ liegt in G. Wegen $(\alpha x)_1 = x_{\alpha^{-1}1} = x_1$, $(\alpha x)_{n^r} = x_{\alpha^{-1}n^r} = x_n = x_{n^r}$ ist $\alpha x = x$ nach 2.1. Daher gilt für dieses Tupel die Gleichung $x_{i^r} = x_i$ für alle $i \in N$. Setze nun für beliebiges $m \in N - \{1\}$: $i_1 = \sigma^{-1}(m^{-1})$, $i_2 = \tau^{-1}(m^{-1})$. Dann ist nach Definition von $\sigma, \tau: i_1 = mi_1^s$, $i_2^r = i_2^s$, und man rechnet leicht $i_1 \neq i_2$ nach. Die Substitution $\beta: i \to mi^s$ liegt in G. Wegen $(\beta^{-1}x)_{i_1} = x_{\beta i_1} = x_{mi_1 s} = x_{i_1}$, $(\beta^{-1}x)_{i_2} = x_{\beta i_2} = x_{mi_2 s} =$

$x_{i_2 r} = x_{i_2}$ ist dann $\beta^{-1}x = x$, also $\beta x = x$, d.h. $x_{mi'} = x_i$ für alle $i \in N$, $m \in N - \{1\}$. Speziell erhalten wir für $i = 1$: $x_m = x_1$ für alle $m \neq 1$, wegen $x_n = a$ also $x = (a, \ldots, a) \in Q$. Da $a \in P$ beliebig war, ist Q idempotent.

2.3. *Ist Q ein $(v, k, 1; G)$-HTS, so ist der Stabilisator G_{ij} verschiedener Stellen i, j trivial.*

Denn ist $\alpha \in G_{ij}$, $\alpha \neq 1$, so gibt es ein $l \in I$ mit $\alpha l \neq l$, und nach (HTS) existiert ein $x \in Q$ mit $x_l = a$, $x_{\alpha^{-1}l} = b \neq a$ ($v \geqslant 2$!). Für dieses x gilt $(\alpha x)_l = x_{\alpha^{-1}l} = b \neq a = x_1$, also $\alpha x \neq x$. Andrerseits ist $(\alpha x)_i = x_{\alpha^{-1}i} = x_i$, $(\alpha x)_j = x_{\alpha^{-1}j} = x_j$. Nun liefert 2.1 einen Widerspruch.

Wir verwenden nun den folgenden Satz von Frobenius (s. z.B. Hall [2]):

2.4. *G sei eine auf I, $|I| \geqslant 2$ treue, transitive Permutationsgruppe mit der Eigenschaft, daß der Stabilisator je zweier verschiedener Elemente von I trivial ist. Dann bilden die fixpunktfreien Elemente von G einen regulären Normalteiler N; der Stabilisator einer Stelle i_0 ist isomorph zu einer Gruppe A fixpunktfreier Automorphismen von N, und G ist isomorph zum semidirekten Produkt $N \times A$, mit der Operation $(m, t) \cdot wi_0 = mw^t i_0$ auf $I = Ni_0$.*

Aus 2.4. folgern wir

2.5. *G sei eine auf I treue Permutationsgruppe derart, daß der Stabilisator je zweier verschiedener Elemente von I trivial ist. Ist dann G nicht semiregulär, und besitzt G keinen Fixpunkt, so operiert G auf einer Bahn I_0 treu und auf den übrigen Bahnen treu und regulär.*

Denn nach Voraussetzung enthält jede Bahn I mindestens zwei Elemente; also ist der punktweise Stabilisator von I trivial, und G ist auf jeder Bahn treu. Weil G nicht semiregulär ist, gibt es eine Bahn I_0 derart, daß G auf I_0 nicht regulär ist. Gäbe es eine weitere Bahn I_1, auf der G nicht regulär ist, so enthielte G nach 2.4 zwei echte Normalteiler N_0, N_1 derart, daß jedes Element von $G - N_\nu$ ein Element von I_ν festläßt ($\nu = 0, 1$). Nach Voraussetzung wäre also $(G - N_0) \cap (G - N_1) = \phi$, $G \subseteq N_1 \cup N_2$, $|G| \leqslant |N_0| + |N_1| - 1 \leqslant \frac{1}{2}|G| + \frac{1}{2}|G| - 1 = |G| - 1$. Das ist ein Widerspruch. Daher ist G auf jeder Bahn I_0 regulär.

2.6. *G sei eine treue, auf I transitive Permutationsgruppe. Ist dann Q ein $(v, k, 1; G)$-HTS, so tritt einer der drei Fälle ein:*

(i) *Q ist idempotent;*
(ii) *G ist regulär auf I;*
(iii) *G enthält einen regulären abelschen Normalteiler N von ungerader Ordnung und Index 2. G enthält ein Element α der Ordnung 2 mit der Eigenschaft $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in N$. Es ist $G = N \cup \alpha N$, und jedes Element von αN läßt genau eine Stelle fest.*

Beweis. Nach 2.3 und 2.4 enthält G einen regulären Normalteiler N, und wenn wir I mit N identifizieren, so erfüllt G die Voraussetzungen von 2.2. Ist daher Q nicht idempotent, so ist $|A| \leqslant 2$, also entweder $A = 1$, $G = N$, was Fall (ii) ergibt, oder $|A| = 2$. In diesem Fall sei r der von 1 verschiedene Automorphismus in A. r ist dann ein fixpunktfreier Automorphismus der Ordnung 2 von N; daher ist die Abbildung $\rho: i \to i^r i^{-1}$ $(i \in N)$ eine Permutation von N. Wegen $(\rho i)^r = (i^r i^{-1})^r = i^{r^2}\,(i^r)^{-1} = i(i^r)^{-1} = (i^r i^{-1})^{-1} = (\rho i)^{-1}$ ist dann $i^r = i^{-1}$ für alle $i \in N$, und da r Automorphismus sein sollte, ist N abelsch. N kann kein Element m der Ordnung 2 enthalten, da sonst $m^r = m^{-1} = m$, und r nicht fixpunktfrei wäre. Daher hat N ungerade Ordnung. Mit $\sigma: i \to \sigma i$ $(i \in N)$ für $\sigma \in N$, $\alpha: i \to i^{-1}$ $(i \in N)$ ergibt sich dann $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma^{-1}$, und $G = N \cup \alpha N$. Da nach 2.4 genau die Elemente von N fixpunktfrei sind, läßt jedes Element von αN mindestens eine, und daher genau eine Stelle fest.

Nun können wir Satz 1 beweisen.

Angenommen, es liegt weder Fall 2 noch Fall 3 vor. Nach 2.3 und 2.5 gibt es dann eine Bahn I_0 mit $|I_0| = k_0 \geqslant 2$ derart, daß G auf den Bahnen I_0 regulär operiert. Nach 1.3 ist $Q^{(I_0)} = \{(x_i : i \in I_0) \mid x \in Q\}$ ein $(v, k_0, 1)$-HTS, und G erweist sich sofort als Gruppe freier Automorphismen von $Q^{(I_0)}$. Wegen unserer Annahme ist dann nach 2.6 entweder (iii) richtig – diesen Fall behandeln wir später; oder $Q^{(I_0)}$ ist idempotent, d.h. es gibt für jedes $a \in P$ ein Tupel $a^* \in Q$ mit $a_i^* = a$ für alle $i \in I_0$.

Es seien nun $i_1, i_2 \in I_0$, $i_1 \neq i_2$. Dann ist für $a \in P$, $\alpha \in G: (\alpha a^*)_{i_1} = a^*_{\alpha^{-1} i_{-1}} = a = a^*_{i_1 i}$, $(\alpha a^*)_{i_2} = a^*_{\alpha^{-1} i_2} = a = a^*_{i_2 i}$, wegen 2.1 also $\alpha a^* = a^*$, d.h. es ist $a^*_{\alpha i} = a_i^*$ für alle $i \in I$, $a \in P$, $\alpha \in G$. Daher gibt es für jede G-Bahn I' eine Selbstabbildung $\sigma_{I'}$ von P mit $a_i{}^* = \sigma_{I'}(a)$ für alle $i \in I'$. Wegen 2.1, und da wegen unsrer Annahme jede Bahn mindestens zwei Stellen enthält, muß $\sigma_{I'}$ eine Permutation von P sein. Daher ist $T = \{a^* \mid a \in P\}$ eine Transversale von Q. Der Isotopismus $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ mit $\pi_i = \sigma_{I'}^{-1}$ falls $i \in I'$ transformiert T in die Transversale $\{(a, \ldots, a) \mid a \in P\}$ von $Q^* = \Pi Q$. Daher ist Q^* ein idempotentes $(v, k, 1)$-HTS, und man prüft leicht nach, daß G eine Gruppe freier Automorphismen von Q ist. Also liegt Fall 1 vor.

Es bleibt noch der Fall, daß $Q^{(I_0)}$ die Bedingung 2.6(iii) erfüllt. Nach 2.5 operiert G semiregulär auf $I - I_0$, also auch N. I_0 ist N-Bahn, da N auf I_0 regulär. Außerdem läßt G, also auch α die Bahn I_0 fest. Wegen $\alpha N = N\alpha$ permutiert α die übrigen N-Bahnen. α kann keine weitere N-Bahn I' festlassen, da sonst auch $G = N \cup \alpha N\, I'$ festlassen würde. Daher liegt jetzt Fall 4 vor.

3. Affine Ebenen, Raster und homogene Tupelsysteme

Wir führen Raster einer affinen Ebene ein und beweisen dann einen Äquivalenzsatz zwischen affinen Ebenen und homogenen Tupelsystemen.

DEFINITION. Ein *Raster* (engl. screen) einer affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ der Ordnung v ist eine Zerlegung der Menge der affinen Geraden in v Geradenklassen $\mathscr{B}_a (a \in K)$ derart, daß zu jedem $i \in l_\infty$, $a \in K$ genau ein $l \in \mathscr{B}$ existiert mit $i \in l \in \mathscr{B}_a$ (Dabei ist K eine beliebige Indexmenge mit v Elementen).

Eine Kollineationsgruppe Γ heißt mit dem Raster $(\mathscr{B}_a)_{a \in K}$ *verträglich*, wenn $\alpha \mathscr{B}_a = \mathscr{B}_a$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $a \in K$.

Unmittelbar ersichtlich ist:

3.1. *Die Geraden* $\neq l_\infty$ *durch* $i \in l_\infty$ *seien in irgendeiner Weise numeriert als* $l_{i,a}$ $(a \in K)$. *Dann ist das System der Klassen* $\mathscr{B}_a = \{l_{i,a} \mid i \in l_\infty\}$ $(a \in K)$ *ein Raster. Jedes Raster entsteht auf diese Weise.*

3.2. Q *sei* $(v, v+1, 1)$-HTS *über* K. *Definiert man für jedes* $x \in Q$ *einen Punkt* P_x $(P_x = P_y \Leftrightarrow x = y)$ *und setzt man*

$$\mathscr{P} = I \cup \{P_x \mid x \in Q\}, \quad \mathscr{B} = \{l_\infty\} \cup \{(i, a) \mid i \in I, a \in K\},$$

und für $x \in Q$, $i, j \in I$, $a \in K$ *die Inzidenzen*

$$P_x \in (i, a) \Leftrightarrow x_i = a; \quad P_x \notin l_\infty;$$
$$j \in (i, a) \Leftrightarrow i = j; \quad j \in l_\infty,$$

so ist $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ *eine affine Ebene der Ordnung* v, *und* $\mathscr{B}_a = \{(i, a) \mid i \in I\}$ $(a \in K)$ *ist ein Raster der Ebene.*

Beweis. (a) Es seien die Geraden l_∞, (i, a) gegeben. Auf l_∞ liegen genau die $j \in I$, und der einzige dieser Punkte, der auch auf (i, a) liegt, ist $j = i$. (b) Es seien die Geraden (i, a), (j, b) gegeben. Ist $i = j$, $a \neq b$, so gibt es keinen Punkt P_x, der auf beiden Geraden liegt, da sonst $a = x_i = x_j = b$ wäre. Daher ist i der einzige Schnittpunkt. Ist aber $i \neq j$, so liegt kein Punkt $\in I$ auf beiden Geraden, und ein Punkt P_x auf beiden Geraden erfüllt $x_i = a$, $x_j = b$ und ist daher eindeutig bestimmt.

Daher haben zwei verschiedene Geraden von $\mathscr{B}$ einen eindeutigen Schnittpunkt. Wegen $|\mathscr{P}| = |\mathscr{B}| = v^2 + v + 1$ (nach 1.7 und wegen $k = v + 1$) ist daher nach einem Satz von Ryser [7] $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$ eine projektive Ebene (der Ordnung v). Offensichtlich ist $(\mathscr{B}_a)_{a \in K}$ ein Raster von $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$.

3.3. $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ *sei affine Ebene der Ordnung* v. $(\mathscr{B}_a)_{a \in K}$ *sei ein Raster der Ebene. Für jeden affinen Punkt* P *sei ein* $(v+1)$-*Tupel* x^P *definiert durch:* $(x^P)_i = a$ $\Leftrightarrow$ *die Verbindungsgerade von* i *und* P *liegt in* $\mathscr{B}_a$ $(i \in l_\infty, a \in K)$. *Dann ist* $Q = \{x^P \mid P \in \mathscr{P}, P \notin l_\infty\}$ *ein* $(v, v+1, 1)$-HTS *über* K. *Die Konstruktion ist zu* 3.2 *invers.*

Denn aus $(x^P)_i = a$, $(x^P)_j = b$, $i \neq j$ folgt $i \in \overline{iP} \in \mathscr{B}_a$, $j \in \overline{jP} \in \mathscr{B}_a$; sind also l, l' die Geraden mit $i \in l \in \mathscr{B}_a$, $j \in l' \in \mathscr{B}_b$, so ist wegen $i \neq j$ auch $l \neq l'$, und P ist der einzige Schnittpunkt von l und l'. Daher ist auch x^P eindeutig bestimmt. Da l_∞ genau $v + 1$ Punkte enthält, hat jedes Tupel $v + 1$ Stellen, und Q

ist ein $(v, v+1, 1)$-HTS. Daß 3.3 und 3.2 zueinander inverse Konstruktionen sind, ist klar (z.B. entspricht (i, a) der eindeutig bestimmten Gerade l mit $i \in l \in \mathscr{B}_a$).

3.4. *Sind* $(\mathscr{B}_a)_{a\in K}$ *und* $(\mathscr{B}'_a)_{a\in K'}$ *verschiedene Raster der affinen Ebene* $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ *der Ordnung* v, *so sind die zugehörigen homogenen Tupelsysteme isotop. Umgekehrt erhält man aus isotopen homogenen Tupelsystemen isomorphe affine Ebenen.*

Beweis. (a) Es sei Q über K das zu $(\mathscr{B}_a)_{a\in K}$ gehörige $(v, v+1, 1)$-HTS. Es sei $l_{i,a}$ die Gerade mit $i \in l_{i,a} \in \mathscr{B}_a$, und es sei $l_{i,a} \in \mathscr{B}'_{\pi_i a}$. Das definiert Abbildungen $\pi_i: K \to K'$, die sich wegen der Rastereigenschaft von $(\mathscr{B}_a)$ und $(\mathscr{B}'_a)$ als Permutationen erweisen. Ist $\Pi = (\pi_i : i \in l_\infty)$, so ist ΠQ das zu $(\mathscr{B}'_a)_{a\in K'}$ gehörige homogene Tupelsystem. Denn $(x^P)_i = a \Leftrightarrow i \in \overline{iP} \in \mathscr{B}_a \Leftrightarrow \overline{iP} = l_{i,a}$ $\Leftrightarrow i \in \overline{iP} \in \mathscr{B}'_{\pi_i a} \Leftrightarrow (x^P)'_i = \pi_i a$. Daher ist $(x^P)' = \Pi x^P$. Also gilt die erste Behauptung. (b) Es sei nun Q ein $(v, v+1, 1)$-HTS über K, α eine Permutation von I, und $\Pi = (\pi_i : i \in I)$ ein $(v+1)$-Tupel von Bijektionen $\pi_i: K \to K'$. Zu $(\alpha, \Pi)Q$ gehört dann die affine Ebene $(\mathscr{P}', \mathscr{B}', l_\infty)$ mit

$$\mathscr{P}' = I \cup \{P'_{(\alpha,\Pi)x} \mid x \in Q\}, \qquad \mathscr{B}' = \{l_\infty\} \cup \{(i, a) \mid i \in I, a \in K'\},$$

und mit der durch

$$P'_{(\alpha,\Pi)x} \in (i, a)' \Leftrightarrow ((\alpha, \Pi)x)_i = \pi_{\alpha^{-1}i} x_{\alpha^{-1}i} = a; \qquad P_{(\alpha,\Pi)x} \notin l_\infty;$$
$$j \in (i, a)' \Leftrightarrow i = j; \qquad j \in l_\infty$$

gegebenen Inzidenz. Man sieht nun leicht, daß die Abbildung, die die affinen Punkte P_x in $P_{(\alpha,\Pi)x}$, die Punkte $i \in l_\infty$ in αi, die affinen Geraden (i, a) in $(\alpha i, \pi_{\theta i} a)'$ und l_∞ in sich überführt, ein Isomorphismus der zu Q gehörigen affinen Ebene (I) auf $(\mathscr{P}', \mathscr{B}', l_\infty)$ ist: $P_x \in (i, a) \Leftrightarrow x_i = a \Leftrightarrow ((\alpha, \Pi)x)_{\alpha i} = \pi_{\theta i} x_i = \pi_{\theta i} a \Leftrightarrow P'_{(\alpha,\Pi)x} \in (\alpha i, \pi_{\theta i} a)'$; analog für die uneigentlichen Elemente. Daher ist auch der zweite Teil von 3.4 richtig.

3.5. $(\mathscr{B}_a)_{a\in K}$ *sei ein Raster der affinen Ebene* $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ *der Ordnung* v, *und* Q *das zugehörige* $(v, v+1, 1)$-HTS. *Ist* α^* *eine Kollineation der Ebene, ist* $\alpha = \alpha^*|_{l_\infty}$, *und bildet* α^* *die Gerade* $l_{i,a}$ *mit* $i \in l_{i,a} \in \mathscr{B}_a$ *ab auf eine Gerade in* $\mathscr{B}_{\pi_i a}$, *so sind die* $\pi_i (i \in l_\infty)$ *Permutationen von* K, *und mit* $\Pi = (\pi_i : i \in l_\infty)$ *ist* (α, Π) *ein Autotopismus von* Q. *Ist umgekehrt* (α, Π) *ein Autotopismus von* Q, *so ist*

$$\alpha^* : \begin{cases} P_x \to P_{(\alpha,\Pi)x},\ i \to \alpha i, \\ (i, a) \to (\alpha i, \pi_{\theta i} a),\ l_\infty \to l_\infty \end{cases}$$

eine affine Kollineation von $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$.

Der Beweis ist analog zum Beweis von 3.4 und kann dem Leser überlassen werden.

Wir fassen 3.2 bis 3.5 zusammen zum:

SATZ 2. *Die Klassen isomorpher affiner Ebenen der Ordnung v entsprechen eineindeutig den Klassen isotoper* $(v, v+1, 1)$-HTS. *Dabei entsprechen die Kollineationen einer affinen Ebene eineindeutig den Autotopismen irgendeines zugehörigen* $(v, v+1, 1)$-HTS.

Wir erwähnen noch ein paar Folgerungen aus 3.5, Es sei $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ eine affine Ebene mit Raster $(\mathscr{B}_a)_{a\in K}$, und Q das zugehörige $(v, v+1, 1)$-HTS.

3.6. *Die freien Automorphismen von Q entstehen gerade aus den mit dem Raster $(\mathscr{B}_a)_{a\in K}$ verträglichen Kollineationen.*

Denn $\pi_i = 1$ für alle $i \in l_\infty$ besagt gerade, daß alle Geraden $l_{i,a} \in \mathscr{B}_a$ wieder auf Geraden von $\mathscr{B}_a$ abgebildet werden.

3.7. *Die Perspektivitäten α^* mit Achse l_∞ entsprechen genau den reinen Autotopismen $\Pi = (\pi_i : i \in l_\infty)$. Ist $\pi_{i_0} = 1$ für ein $i_0 \in l_\infty$, so ist i_0 Zentrum von α^*; ist kein π_i die Identität, so ist α^* eine Homologie.*

Denn α^* hat die Achse l_∞ genau dann, wenn $\alpha = \alpha^*|_{l_\infty} = 1$, und alle Geraden durch i_0 bleiben genau dann fest, wenn $\alpha^* l_{i_0,a} = l_{i_0,a}$, also $\pi_{\alpha i_0} a = \pi_{\alpha i_0} a = a$ für alle $a \in K$. Also ist i_0 Zentrum genau dann, wenn $\pi_{i_0} = 1$ ist; und falls dies für kein i_0 gilt, muß α^* ein affines Zentrum besitzen, d.h. eine Homologie sein.

3.8. *Die Perspektivitäten α^* mit Zentrum $i_0 \in l_\infty$ und affiner Achse sind genau die Autotopismen (α, Π) mit $\alpha \neq 1$, $\alpha i_0 = i_0$, $\pi_{i_0} = 1$. Ist α auf $l_\infty - \{i_0\}$ semiregulär, so ist α^* Elation; hat α auf l_∞ dagegen einen weiteren Fixpunkt $i_1 \neq i_0$, so ist α^* Homologie, und die Achse von α^* geht durch i_1.*

Der Beweis ist ähnlich wie der von 3.7 und wird dem Leser überlassen.

Zum Schluß gehen wir ohne Beweis auf den Zusammenhang zwischen Ternärkörpern (planar ternary rings) und $(v, v+1, 1)$-HTS ein:

3.9. *Ist (K, T) ein Ternärkörper der Ordnung v, so ist mit $I = K \cup \{\infty\}$, $\mathrm{T}(\infty, a, b) = a$ (für $a, b \in K$) das Tupelsystem $Q = \{(\mathrm{T}(i, a, b) : i \in I) \mid a, b \in K\}$ ein* $(v, v+1, 1)$-HTS *über K. Ist umgekehrt Q ein* $(v, v+1, 1)$-HTS *über K, so kann man die Stellen mit $I = K \cup \{\infty\}$ numerieren, und erhält (für ein beliebiges Element $0 \in K$) eine ternäre Operation T auf K durch $\mathrm{T}(i, a, b) = x_i$ (wo x das durch $x \in Q$, $x_\infty = a$, $x_0 = b$ eindeutig bestimmte Tupel ist), die (K, T) zu einem Ternärkörper (der Ordnung v) macht.*

4. Rasterverträgliche Kollineationsgruppen

4.1. *Ist Γ eine auf l_∞ treue und semireguläre Kollineationsgruppe der affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ so besitzt die Ebene ein mit Γ verträgliches Raster.*

Das folgt sofort aus

SATZ 3. *Γ sei eine Kollineationsgruppe der endlichen affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ der Ordnung v. Genau dann besitzt die Ebene ein mit Γ verträgliches Raster, wenn gilt:*

(R) *Für alle $i \in l_\infty$ besteht der Stabilisator Γ_i des Punktes i aus lauter Perspektivitäten mit Zentrum i.*

Beweis. 1. $(\mathscr{B}_a)_{a \in K}$ sei ein mit Γ verträgliches Raster. Ist $\alpha \in \Gamma_i$, l eine beliebige Gerade durch i, etwa $i \in l \in \mathscr{B}_a$, so ist $i = \alpha i \in \alpha l \in \alpha\mathscr{B}_a = \mathscr{B}_a$, also nach Definition eines Rasters $\alpha l = l$. Daher läßt α alle Geraden durch i fest und ist eine Perspektivität mit Zentrum i.

2. Es sei (R) erfüllt. I_0 sei ein Repräsentantensystem der Γ-Bahnen von l_∞. Wir numerieren die Geraden $\neq l_\infty$ durch $i \in I_0$ in irgendeiner Weise mit einer v-Menge K als $l_{i,a}$ $(a \in K)$. Die Geradenklassen $\mathscr{B}_a = \{\alpha l_{i,a} \mid i \in I_0, \alpha \in \Gamma\}$ $(a \in K)$ bilden ein Raster. Denn seien $i \in l_\infty$, $a \in K$ gegeben, und etwa $i = \beta j$ mit $\beta \in \Gamma$, $j \in I_0$. $i \in l \in \mathscr{B}_a$ ist gleichwertig mit $i \in l = l_{j_0,a}$ für ein $\alpha \in \Gamma$, $j_0 \in I_0$. Wegen $j_0 \in l_{j_0,a}$ folgt $\alpha j_0 = i = \beta j$, also liegen j_0, j in derselben Bahn von Γ und sind daher gleich. Also ist $\alpha j = \beta j$, und $\gamma = \beta^{-1}\alpha$ liegt im Stabilisator von j. Wegen (R) läßt γ die Gerade $l_{j,a}$ fest. Deshalb ist $l = \alpha l_{j_0,a} = \beta\gamma l_{j,a} = \beta l_{j,a}$ die eindeutig bestimmte Gerade mit $i \in l \in \mathscr{B}_a$. Ohne weiteres sieht man, daß das konstruierte Raster mit Γ verträglich ist.

4.2. Aus (R) folgt: *Γ ist treu auf l_∞, und für alle $i \in l_\infty$ besteht Γ_i aus Elationen mit Zentrum i und affiner Achse.*

Denn ist $\alpha \in \Gamma$, $\alpha i = i$ für alle $i \in l_\infty$, so ist $\alpha \in \Gamma_i$ für alle $i \in l_\infty$, hat also mehr als ein Zentrum, und ist daher die Identität. Also ist Γ treu auf l_∞. Insbesondere kann die Achse einer Perspektivität $\alpha \in \Gamma_i$ nicht l_∞ sein. $\alpha \in \Gamma_i - \{1\}$ kann aber auch nicht Homologie sein. Sonst ist nämlich die Achse l von α von l_∞ verschieden und geht nicht durch i. Daher ist $l \cap l_\infty$ ein weiterer Fixpunkt von α auf l_∞, und α hätte zwei Zentren, wäre also die Identität. Daher muß α Elation sein.

Wir beweisen nun

SATZ 4. *Γ sei eine Kollineationsgruppe der affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ der Ordnung v.* (R) *gilt genau dann, wenn einer der folgenden Falle vorliegt:*

1. *Γ ist treu, hat einen Fixpunkt $i_0 \in l_\infty$ und ist semiregulär auf den übrigen Punkten von l_∞. Γ besteht aus lauter Elationen mit Zentrum i_0 und affiner Achse. Die Ordnung von Γ ist ein Teiler von v.*

2. *Γ ist treu und semiregulär auf l_∞; die Ordnung von Γ ist ein ungerader Teiler von $v + 1$.*

3. *Γ enthält einen auf l_∞ treuen semiregulären abelschen Normalteiler N vom Index 2 in Γ, und eine involutorische Elation α mit $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma^{-1}$ für alle*

$\sigma \in N$. Es ist $\Gamma = N \cup \alpha N$. N läßt einen affinen Punkt P_0 fest. Die Kollineationen in αN sind involutorische Elationen mit uneigentlichem Zentrum und Achse durch P_0. Diese Zentren bilden eine N-Bahn I_0. α läßt I_0 fest und permutiert die übrigen N-Bahnen von l_∞ in Zyklen der Länge 2. v ist gerade, und $|N| \mid v + 1$.

Beweis. (a) Offensichtlich sind die genannten Bedingungen hinreichend für (R).

(b) 1. Γ hat einen Fixpunkt $i_0 \in l_\infty$ und ist semiregulär auf den übrigen Punkten von l_∞. Aus 4.2 ergibt sich, daß Γ vom Typ 1 ist, wenn man beachtet, daß $|\Gamma| \mid v$, da l_∞ $v + 1$ Punkte enthält.

2. Γ ist semiregulär auf l_∞. Da l_∞ $v + 1$ Punkte enthält, folgt $|\Gamma| \mid v + 1$. Wäre die Ordnung von Γ gerade, so wäre v ungerade. Es gäbe ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\alpha^2 = 1$, $\alpha \neq 1$. Als involutorische Kollineation ist dann (da v ungerade ist) α entweder Homologie oder Baer-Involution. Ist α Homologie, so ist, da wegen 4.2 Γ treu ist, die Achse l von α affin, also $l \cap l_\infty$ ein Fixpunkt von α im Widerspruch zur Semiregularität. Ist α Baer-Involution, so läßt α eine Baer-Unterebene der Ordnung $\sqrt{v}$ punktweise fest. Da l_∞ fest bleibt, bleiben $\sqrt{v} + 1$ Punkte auf l_∞ fest, entgegen der Semiregularität. Also muß die Ordnung von Γ ungerade sein. Daß Γ treu ist, folgt aus 4.2.

3. Jetzt sei Γ nicht vom Typ 1 oder 2. Nach Satz 3 gibt es ein mit Γ verträgliches Raster, und das zugehörige $(v, v + 1, 1)$-HTS Q enthält eine zu Γ als Permutationsgruppe isomorphe Gruppe G freier Automorphismen von Q (nach 3.6). Wir wenden nun Satz 1 an. Wegen $k = v + 1 > v$ kann, nach 1.7, Q nicht isotop zu einem idempotenten HTS sein. Also tritt Fall 1 nicht auf. Im Fall 2 oder 3 wäre Γ entgegen der Annahme vom Typ 1 oder 2 (nach dem eben Gezeigten). Daher liegt Fall 4 vor, und Γ enthält einen auf l_∞ semiregulären abelschen Normalteiler vom Index 2, und eine involutorische Kollineation α mit $\alpha^{-1}\sigma\alpha = \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in N$. α läßt genau eine N-Bahn I_0 von l_∞ fest und permutiert die übrigen N-Bahnen von l_∞ (also in Zyklen der Länge 2). Es ist $\Gamma = N \cup \alpha N$, und jedes Element von αN läßt genau eine Stelle von I_0 fest.

Nach 4.2. ist daher jedes Element von αN Elation mit Zentrum aus I_0 und affiner Achse. Außerdem ist $(\alpha\sigma)^2 = \alpha\sigma\alpha\sigma = \alpha\sigma\sigma^{-1}\alpha = \alpha^2 = 1$. Aus der Existenz involutorischer Elationen folgt, daß v gerade ist. $|N| \mid v + 1$ ergibt sich wie im Fall 2. Um zu zeigen, daß Γ vom Typ 3 ist, genügt es nun, nachzuweisen, daß N einen affinen Fixpunkt P_0 besitzt. Da α im Normalisator von N liegt, läßt dann α den Punkt P_0 fest; Dann läßt auch Γ den Punkt fest, und P_0 muß daher auf der Achse jeder Elation von Γ liegen. Daß N einen affinen Fixpunkt hat, folgt schließlich aus

4.3. *Ist N eine abelsche, auf l_∞ treue und semireguläre Kollineationsgruppe der affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$, so läßt N einen affinen Punkt fest.*

Denn $\sigma \in N - \{1\}$ läßt genau eine Gerade l_∞ von $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$ fest ($\sigma l = l$, $l \neq l_\infty \Rightarrow \sigma$ läßt $l \cap l_\infty$ fest, Widerspruch). Daher läßt σ auch genau einen Punkt P_σ fest, der nicht auf l_∞ liegen kann (wegen der Semiregularität). Sind nun $\sigma, \tau \in N - \{1\}$, so ist $\sigma\tau P_\sigma = \tau\sigma P_\sigma = \tau P_\sigma$, also, wegen der Eindeutigkeit von P_σ, $\tau P_\sigma = P_\sigma$, und wegen der Eindeutigkeit von P_τ dann $P_\sigma = P_\tau$. Also lassen alle Elemente von N denselben Punkt fest.

Aus 4.1. und Satz 4 ergibt sich noch:

4.4. *Zu einer Kollineationsgruppe Γ einer endlichen affinen Ebene $\mathscr{A}$ gibt es genau dann ein mit Γ verträgliches Raster von $\mathscr{A}$, wenn Γ von einem der in Satz 4 beschriebenen Typen ist.*

In jeder affinen Ebene bilden z.B. die Elationen mit fester Achse, und Zentrum i_0 eine Gruppe vom Typ 1. Wir geben nun einige (desarguessche) Beispiele für $(v, v+1, 1; G)$-HTS an. Die zugehörigen affinen Ebenen haben Kollineationsgruppen der Typen 2 oder 3.

Zu diesem Zweck sei q eine Primzahlpotenz, $k = GF(q)$ der endliche Körper mit q Elementen, und $K = GF(q^2)$ eine quadratische Erweiterung von k. Die Spur $s(x) = x + x^q$ ist eine k-lineare Abbildung von K auf k und erfüllt $s(x^q) = s(x)$.

4.5. *Es sei $q = 2^n$, α sei ein Element der Ordnung $q+1$ in K. Dann ist $Q = \{(s(\alpha^i x) : i = 0, 1, \ldots, v) \mid x \in K\}$ ein $(q, q+1, 1; D_{q+1})$-HTS über k (D_{q+1} bezeichnet die Diedergruppe der Ordnung $2(q+1)$).*

Es genügt zu zeigen, daß für $i \not\equiv j \bmod q+1$ das lineare Gleichungssystem $s(\alpha^i x) = a$, $s(\alpha^j x) = b$ den Rang 2 über k hat, da es dann eindeutig nach x auflösbar ist. Es seien also $c, d \in k$ derart, daß für alle $x \in K$ gilt $0 = cs(\alpha^i x) + ds(\alpha^j x) = s((c\alpha^i + d\alpha^j)x)$. Da die Spur surjektiv ist, muß dann $c\alpha^i + d\alpha^j = 0$ sein. Sind nun c, d nicht beide $=0$, so sind beide von 0 verschieden, und es ist $\alpha^{i-j} = -c^{-1}d$. Links steht ein Element, dessen Ordnung ein Teiler von $q+1$, und rechts eines, dessen Ordnung ein Teiler von $q-1$ ist. Da diese beiden Zahlen teilerfremd sind, folgt $\alpha^{i-j} = -c^{-1}d = 1$ und daraus $i \equiv j \bmod q+1$, entgegen der Annahme. Daher ist Q ein $(q, q+1, 1)$-HTS. Wegen $s(\alpha^{i+i_0}x) = s(\alpha^i\alpha^{i_0}x)$ und $s(\alpha^{-i}x) = s(x^{q-1}{}_ix) = s(\alpha^i x^q)$ sind schließlich die Substitutionen $i \to i + i_0$, $i \to -i \,(\bmod q+1)$ freie Automorphismen von Q, die D_{q+1} erzeugen.

4.6. *q sei ungerade Primzahlpotenz, und d sei der größte ungerade Teiler von $q+1$. α sei ein Element von K der Ordnung d, und $\beta \in K$ habe die Ordnung $d^{-1}(q^2-1)$. Mit $I = \{(i,j) \mid 0 \leqslant i < d, 0 \leqslant j < d^{-1}(q-1)\}$ ist dann $Q = \{s(\alpha^i\beta^j x) : (i,j) \in I) \mid x \in K\}$ ein $(q, q+1, 1; Z_d)$-HTS über k (Z_d ist die zyklische, auf I semireguläre Gruppe der Ordnung d).*

Das beweist man wie 4.5. Z_d besteht aus den Substitutionen $(i,j) \to (i + i_0, j)$, wo die Summe mod d berechnet wird.

Für desarguessche affine Ebenen kann man zeigen, daß eine auf l_∞ semireguläre und treue Kollineationsgruppe zyklisch sein muß. Man kann also vermuten, daß in einer beliebigen endlichen affinen Ebene jede Gruppe vom Typ 2 zyklisch (und daher jede Gruppe vom Typ 3 eine Diedergruppe) sein muß.

5. Affine Ebenen und SBTS. Elationen gerader Ordnung

Wir koordinatisieren affine Ebenen nun noch auf eine andere Weise, und zwar mit Hilfe von stark balancierten Tupelsystemen.

5.1. *$(\mathcal{P}, \mathcal{B}, l_\infty)$ sei affine Ebene der Ordnung v, und ∞_K, ∞_I seien verschiedene Punkte auf l_∞. Die Geraden durch ∞_K bzw. ∞_I seien als l_a $(a \in K)$ bzw. l_i $(i \in I)$ numeriert (K und I sind dabei beliebige v-Mengen). Für jede Gerade $m \not\ni \infty_I, \infty_K$ sei x^m das Tupel mit $x_i^m = a \Leftrightarrow m \cap l_i \in l_a$ $(i \in I, a \in K)$. Dann ist $Q = \{x^m \mid m \not\ni \infty_I, \infty_K\}$ ein $(v, v, 1)$-SBTS über K.*

Denn $x_i^m = x_j^m = a$, $i \neq j$ würde bedeuten $m \cap l_i, m \cap l_j \in l_a$, also den Widerspruch $l_a = m$ ergeben. Außerdem ist $x_i^m = a$, $x_j^m = b$, $i \neq j$, $a \neq b$ äquivalent zu $m \cap l_i \in l_a$, $m \cap l_j \in l_b$ und hat die eindeutige Lösung $m = (l_i \cap l_a)(l_j \cap l_b)$. Daher ist auch x^m eindeutig bestimmt, und Q ist (wegen $|K| = |I| = v$) ein $(v, v, 1)$-SBTS.

5.2. *Q sei ein $(v, v, 1)$-SBTS über K. Setzt man $\mathcal{P} = I \times K$, $\mathcal{B} = \{l_x \mid x \in Q\} \cup \{l_a \mid a \in K\} \cup \{l_i \mid i \in I\}$ (wobei diese Mengen disjunkt sein sollen), und definiert man Indizenz durch $(i, a) \in l_x \Leftrightarrow x_i = a$; $(i, a) \in l_b \Leftrightarrow a = b$ und $(i, a) \in l_j \Leftrightarrow i = j$, so ist $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ ein $(v^2, v, 1)$-Blockplan, und $\{l_a \mid a \in K\}$, $\{l_i \mid i \in I\}$ sind verschiedene Parallelklassen des Blockplans.*

Denn $\mathcal{P}$ enthält v^2 Punkte, und jede Gerade in $\mathcal{B}$ enthält v Punkte. Da zwei Geraden l_a, l_b $(a \neq b)$ bzw. l_i, l_j $(i \neq j)$ keinen Punkt gemeinsam haben, sind die angegebenen Geradenmengen tatsächlich Parallelklassen. Schließlich haben zwei Punkte $(i, a) \neq (j, b)$ die eindeutige Verbindungsgerade l_i, wenn $i = j$, l_a, wenn $a = b$, und l_x, wo $x_i = a$, $x_j = b$ das Tupel $x \in Q$ eindeutig bestimmt, wenn $i \neq j$, $a \neq b$. Daher ist $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ ein $(v^2, v, 1)$-Blockplan.

SATZ 5. *Klassen isomorpher $(v, v, 1)$-SBTS und Klassen isomorpher affiner Ebenen der Ordnung v mit zwei ausgezeichneten uneigentlichen Elementen ∞_K, ∞_I entsprechen sich eineindeutig. Dabei entsprechen sich auch die Automorphismengruppe des SBTS und die Gruppe der ∞_K und ∞_I festlassenden Kollineationen der Ebene isomorph.*

Beweis. Bekanntlich (s. z.B. [1]) ist ein $(v^2, v, 1)$-Blockplan eine affine Ebene, und die Parallelklassen sind die Geradenmengen durch uneigentliche Punkte der Ebene. Daher definiert 5.2 eine affine Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, l_\infty)$ (der Ordnung v) und zwei ausgezeichnete Punkte $\infty_K, \infty_I \in l_\infty$. 5.1. und 5.2 werden nun leicht als zueinander inverse Konstruktionen (bis auf Isomorphie) erkannt. Der Satz folgt nun aus

5.3. *Ist α^* eine ∞_K und ∞_I festlassende Kollineation der affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$, und definiert man Permutationen α von I und π von K durch $l_{\alpha i} = \alpha^* l_i$, $l_{\pi a} = \alpha^* l_a$, so ist (α, π) ein Automorphismus des zugehörigen $(v, v, 1)$-SBTS Q. Ist umgekehrt (α, π) ein Automorphismus von Q, so erhält man eine ∞_K und ∞_I festlassende Kollineation von $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ durch*

$$\alpha^* : \begin{cases} (i, a) \to (\alpha i, \pi a), \\ l_x \to l_{(\alpha,\pi)x},\ l_a \to l_{\pi a},\ l_i \to l_{\alpha i}. \end{cases}$$

Denn $x_i^m = a \Rightarrow m \cap l_i \in l_a \Rightarrow \alpha^* m \cap \alpha^* l_i \in \alpha^* l_a \Rightarrow \alpha^* m \cap l_{\alpha i} \in l_{\pi a} \Rightarrow x_{\alpha i}^{\alpha^* m} = \pi a$, weshalb $(\alpha, \pi) x^m = x^{\alpha^* m} \in Q$. Daher ist $(\alpha, \pi) Q = Q$. Umgekehrt folgt $(i, a) \in l_x \Rightarrow x_i = a \Rightarrow ((\alpha, \pi) x)_{\alpha i} = \pi a \Rightarrow \alpha^*(i, a) = (\alpha i, \pi a) \in l_{(\alpha,\pi)x}$, und die Inzidenztreue von α^* für die Geraden durch ∞_K oder ∞_I weist man ebenso nach.

5.4. *$(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ sei affine Ebene, und Q sei das zu $\infty_K, \infty_I \in l_\infty$ gehörige $(v, v, 1)$-*SBTS. (a) *Die reinen Automorphismen π von Q entsprechen genau den Perspektivitäten π^* mit Zentrum ∞_I und Achse durch ∞_K. Genauer ist π^* Homologie mit Achse l_a, falls a Fixpunkt von π ist, und Elation mit Achse l_∞, falls π fixpunktfrei ist.* (b) *Die freien Automorphismen α von Q entsprechen genau den Perspektivitäten α^* mit Zentrum ∞_K und Achse durch ∞_I. Genauer ist α^* Homologie mit Achse l_i, falls i Fixpunkt von α ist, und Elation mit Achse l_∞, falls α fixpunktfrei ist.*

Denn die Geraden l_i durch ∞_I bleiben genau dann fest, wenn $\alpha = 1$, also π reiner Automorphismus ist. In diesem Fall ist also ∞_I Zentrum von π^*. Da π^* ∞_K festläßt, geht die Achse von π^* durch ∞_K. Als Achsen kommen somit in Frage: l_∞ und die $l_a (a \in K)$. l_a ist genau dann Achse, wenn l_a festbleibt, d.h., wenn $\pi a = a$; und die fixpunktfreien reinen Automorphismen π ergeben daher gerade die Elationen π^* mit Achse l_∞. Die Aussage über freie Automorphismen zeigt man entsprechend (mit vertauschter Rolle von K und I).

Wir bemerken, daß die Menge der Abbildungen $\Sigma = \{\pi : K \to K \mid \exists z \in Q : \pi x_i = z_i$ für alle $i \in I\}$ bei gegebenem $(v, v, 1)$-SBTS Q, und gegebenem $x \in Q$, eine scharf 2-transitive Menge von Permutationen von K ist, und daß bei gegebener scharf 2-transitiven Menge Σ von Permutationen von K das Tupelsystem $Q = \{(\pi i : i \in K) \mid \pi \in \Sigma\}$ ein $(v, v, 1)$-SBTS ist. Damit ist die (bekannte) Äquivalenz zwischen endlichen affinen Ebenen und scharf 2-transitiven Mengen von Permutationen gezeigt.

Das SBTS in Satz 5, und damit die zugehörige scharf 2-transitive Permutationsmenge ist bis auf Isomorphie genau dann von der Wahl von ∞_K, ∞_I auf l_∞ unabhängig, wenn $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ eine auf l_∞ 2-transitive Kollineationsgruppe besitzt. (Es gibt nicht-desarguessche Ebenen mit einer solchen Gruppe, *s.* Lüneburg [5].)

SATZ 6. *Q sei $(v, 3, 1)$-*SBTS *über P, und π sei ein fixpunktfreier reiner*

Automorphismus von Q der Ordnung d. Dann ist $d|v$, wenn d ungerade, und $2d|v$, wenn d gerade ist.

Beweis. P_0 sei ein Repräsentantensystem der Bahnen von P unter π. Da π fixpunktfrei ist, hat jede Bahn die Länge d, und es folgt

$$(1) \qquad v = |P| = d|P_0|.$$

Setze für $i \in Z_d$ (die zyklische Gruppe der ganzen Zahlen mod d), $a \in P$: $a^\sigma = i \Leftrightarrow x \in \pi^i P_0$. Dann hat $a^\sigma = i$ genau $d^{-1}v = |P_0|$ Lösungen $a \in P$. Daher ist die Zahl der Tupel $x \in Q$ mit $x_1 \in P_0$, $x_2^\sigma = i$ genau $|P_0|^2$, und die Zahl der Tupel $x \in Q$ mit $x_1 \in P_0$, $x_3^\sigma = i$ ebenfalls $|P_0|^2$. Also ist (die unbezeichneten Summen laufen über alle $x \in Q$ mit $x_1 \in P_0$):

$$(2) \qquad \sum (x_2^\sigma - x_3^\sigma) \equiv \sum x_2 - \sum x_3 \equiv |P_0|^2 \sum_{i=0}^{d-1} i - |P_0|^2 \sum_{i=0}^{d-1} i \equiv 0 \bmod d.$$

Die Zahl der Tupel mit

$$(3) \qquad x \in Q, \qquad x_3^\sigma - x_2^\sigma = i$$

ist $|P| \cdot |P_0|$ (da x_2 beliebig, x_3 dann auf $|P_0|$ Arten, und x dann eindeutig). Da π ein reiner Automorphismus ist, ist mit x auch $\pi^{-s}x \in Q$, und diese Transformation erhält (3). Ist $x_1 = s$, so ist $\pi^{-s}x_1 \in P_0$. Daher ergeben jeweils d Tupel $x \in Q$ mit (3) ein Tupel $x \in Q$ mit

$$(4) \qquad x_3^\sigma = x_2^\sigma = i, \qquad x_1 \in P_0.$$

Die Zahl der Tupel $x \in Q$ mit (4) ist somit $d^{-1}|P| \cdot |P_0| = |P_0|^2$. Daher ist (wieder erstreckt sich die Summe über alle $x \in Q$ mit $x_1 \in P_0$) $\sum (x_2^\sigma - x_3^\sigma) \equiv |P_0|^2 \sum_{i=0}^{d-1} i \equiv |P_0|^2 \cdot d(d-1)/2 \bmod d$. Mit (2) ergibt sich $|P_0|^2 \cdot d(d-1)/2 \equiv 0 \bmod d$, oder $2 \mid |P_0|^2(d-1)$. Also ist $2 \mid |P_0|$, falls d gerade ist, und Gleichung (1) liefert nun die Behauptung.

SATZ 7. *α sei Elation der Ordnung d in der projektiven Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B})$ der Ordnung $v \neq 2$. Dann ist $d|v$, wenn d ungerade, und $2d|v$, wenn d gerade ist.*

Beweis. l_∞ sei die Achse, und $\infty_I \in l_\infty$ das Zentrum von α. ∞_K sei ein beliebiger Punkt $\neq \infty_I$ auf l_∞, Dann hat das zu $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ gehörige $(v, v, 1)$-SBTS nach 5.4 einen reinen Automorphismus der Ordnung d. Dasselbe gilt dann für irgendein nach 1.3 reduziertes $(v, 3, 1)$-SBTS (Es ist $v \geqslant 3$ nach Voraussetzung). Anwendung von Satz 6 liefert nun das gewünschte Ergebnis.

Wir haben zwei Folgerungen aus Satz 7 hervor:

5.5. *In einer projektiven Ebene der Ordnung* $v \equiv 2 \bmod 4$ *gibt es keine Kollineation gerader Ordnung* (Hughes [4]).

Denn wäre α eine Kollineation der geraden Ordnung $d = 2e$, so wäre $\beta = \alpha^e$ Involution. Da wegen $v \equiv 2 \bmod 4$ $\sqrt{v}$ keine ganze Zahl ist, kann β keine Baer-Involution sein, und ist daher Elation (da v gerade ist). Aus Satz 7 folgt nun der Widerspruch $4|v$.

5.6. *In einer (P, l)-transitiven projektiven Ebene gerader Ordnung $(P \in l)$ ist die 2-Sylow-Gruppe der Gruppe Γ der (P, l)-Elationen nichtzyklisch* (Hall [3]).

Denn angenommen, die 2-Sylow-Gruppe von Γ sei von α erzeugt. Dann hat α die gerade Ordnung d, und $d^{-1}v$ ist ungerade (da die Ordnung von Γ v ist). Das widerspricht aber Satz 7.

Zum Schluß bemerken wir, daß aus 5.4 sich noch das folgende bekannte Resultat ergibt:

5.7. *Eine (P, l)-Perspektivität und eine (Q, m)-Perspektivität einer endlichen projektiven Ebene sind vertauschbar, falls $P \in m$, $Q \in l$.*

Denn zur affinen Ebene $(\mathscr{P}, \mathscr{B}, l_\infty)$ mit $l_\infty = PQ$, $\infty_K = P$, $\infty_I = Q$ gehört ein $(v, v, 1)$-SBTS. Die den angegebenen Perspektivitäten entsprechenden Automorphismen des SBTS sind frei bzw. rein, und nach 2.8 sind reine und freie Automorphismen vertauschbar.

BIBLIOGRAPHIE

1. Dembowski, P., *Finite Geometries*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1968.
2. Hall, M., jr., *The Theory of Groups*, New York, MacMillan Co., 1959.
3. Hall, M., jr. and Paige, L.S., 'Complete Mappings of Finite Groups', *Pacific J. Math.* **5**, 541–549 (1955).
4. Hughes, D.R. and Piper, F.C., *Projective Planes*, New York–Heidelberg–Berlin, Springer, 1973.
5. Lüneburg, H., 'Über Projektive Ebenen, in denen jede Fahne von einer nichttrivialen Elation invariant gelassen wird', *Abh. Math. Sem. Hambg.* **29**, 37–76 (1965).
6. Neumaier, A., 'Unifying OA's and BIBD's – A Theory of Tuple Systems', *Proc. Amer. Math. Soc.* (submitted).
7. Ryser, H.J., *Combinatorial Mathematics*, Rahway, N.Y., Wiley, 1963.

Anschrift des Verfassers

Arnold Neumaier
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Berlin
Str. des 17. Juni 135
D-1000 *Berlin* 12

(Eingegangen am 1. April 1976)